ББК 22.12
П 433

Печатается по решению ученого совета ВЦ АН АрмССР и Ереванского государственного университета

Ответственный редактор: кандидат физ.-мат. наук Г. Б. Маранджян

Книгу рекомендовали к печати рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук И. Д. Заславский,
кандидат технических наук В. Г. Ягджян

Погосян Э. М.

П 433 Адаптация комбинаторных алгоритмов/Отв. ред.: Г. Б. Маранджян.—Ер.: Изд-во АН АрмССР, 1983.—285 с.

В монографии исследуются элементы математической теории и методов адаптации разрешающих алгоритмов комбинаторных проблем.

Как фрагмент теории оптимального алгоритмического синтеза программ комбинаторная адаптация переживает период интенсивного развития на стыке дискретной математики, кибернетики, информатики, генетической психологии и по существу составляет одну из основ искусственного интеллекта. Автор рассматривает единые параметрическое представление и аппарат построения нижних оценок сложности для ранее разобщенных проблем расшифровки автоматов, синтеза стратегий, образов ситуаций и др., математические основы экспериментов и соответствующий пакет программ для исследований методов адаптации комбинаторных алгоритмов управления. Для непреодолимо сложных проблем рассматривается возможность приближенного решения посредством итеративного накопления знаний относительно индивидуальных задач и их обобщения. Определяется класс алгоритмов, основанный на комплексном анализе и синтезе целей, планов, образов позиций, закономерностей и др., для которых исследуется возможность адаптации в проблеме-посреднике поиска оптимальных шахматных управлений.

Предназначена для специалистов в области дискретной математики, кибернетики, информатики и искусственонго интеллекта, а также студентов старших курсов соответствующих вузов.

$П \frac{1702070000}{703(02)—83} 73—82$

ББК 22.12
517

© Издательство АН Армянской ССР, 1983.

Оглавление

Стр.

Предисловие 5

Введение 8

Глава I. К классификации комбинаторных проблем 25

§ 1. Комбинаторные оптимизационные проблемы 25
§ 2. Проблемы расшифровки описаний. Адаптация алгоритмов при ограничениях типа 1 33
§ 3. К сложностной классификации комбинаторных проблем . . . 39
§ 4. Приближенное решение комбинаторных проблем. 41

Глава 2. Проблемы расшифровки описаний. 51

§ 1. Представительность проблем расшифровки описаний . . . 51
§ 2. Индукторы и индуктивные выводы 65
§ 3. Классы индукторов и индуктивных выводов 70
§ 4. Индуктивные выводы при параметрической адаптации . . . 76
§ 5. Индуктивные выводы при расшифровке автоматов. 81

Глава 3. К оценке сложности проблем расшифровки описаний . . . 91

§ 1. К построению нижних оценок пиковой сложности 91
§ 2. Системы несравнимых и произвольных множеств с наименьшим числом подмножеств 96
§ 3. Нижние оценки длин минимальных тестов, связь с параметрами проблем расшифровки описаний и алгоритмы построения . . . 106
§ 4. К сложности расшифровки описаний в классе индуктивных выводов . 111
§ 5. Об устойчивости сложностных характеристик согласующих индукторов 121

Глава 4. Вопросы адаптации комбинаторных алгоритмов 132

§ 1. Об алгоритмах комбинаторной регуляризации 132
§ 2. Об исследуемом классе комбинаторных проблем 136
§ 3. Исходные предположения о структуре оптимальных комбинаторных алгоритмов поиска управлений 140
§ 4. Вопросы теории адаптации комбинаторных алгоритмов. . . . 146
§ 5. Турниры как метод экспериментальной оценки качества алгоритмов поиска управлений 151
§ 6. О разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов . 158
§ 7. О достижениях по адаптации комбинаторных алгоритмов . . 167

Глава 5. Структуры представления и комплексного использования <знаний> 186

§ 1. Язык представления <знаний>. Структура описаний. . . . 186
§ 2. Отношение выигрышности. $\langle P, F, I \rangle$-стратегии и их объединения 191

§ 3. Цели и планы 196
§ 4. Образы и смысл ситуаций. Смысл описаний 200
§ 5. Отношения «цель-подцель», «часть-подчасть», «мотив-цель». Функция правдоподобия целей 205
§ 6. Закономерности 208
§ 7. Проблемы синтеза <знаний> 213
§ 8. К сравнительному анализу проблем формирования образов ситуаций 223
§ 9. Алгоритм поиска управлений на основе комплексного использования <знаний> 229

Глава 6. К экспериментам комбинаторной адаптации. Вопросы приложений . . 243

§ 1. Пакеты прикладных программ АКА1 и АКА2 243
§ 2. Эксперименты вычисления правдоподобия целей 246
§ 3. Эксперименты формирования закономерностей типа «правдоподобные цели ⟹ рекомендуемые решения» 250
§ 4. Сравнение эффективности систем управления методом турниров . . 255
§ 5. К взаимосвязи психологии развития с теорией и методами адаптации комбинаторных алгоритмов 267

Список сокращений 276

Литература 278

ПРЕДИСЛОВИЕ

Оптимизационные проблемы определяются множеством исходных данных, или входных записей, понятием оптимальных решений при каждой входной записи и множеством всевозможных решений, классами алгоритмов, в рамках которых производится поиск решений индивидуальных задач и, наконец, операторами качества алгоритмов, на основе которых формируются требования к построению оптимальных алгоритмов. Отдельные подклассы таких проблем получаются заданием конкретных операторов качества алгоритмов или их свойств, специальных представлений для множества возможных решений, дополнительных требований к алгоритмам и др.

Результаты исследований, приведенные в книге, относятся к теории и методам решения массовых комбинаторных оптимизационных проблем, характеризуемых следующими дополнительными ограничениями:

1) независимо от стадии построения истинного решения заданной индивидуальной задачи в каждый момент времени необходимо иметь какое-либо решение этой задачи, быть может, в форме гипотезы;

2) критерии качества решений индивидуальных задач, как правило, либо не имеют алгоритмического представления, либо трудно вычислимы;

3) допускаются либо известны лишь локальные средства усиления текущих гипотез—решений индивидуальных задач. (Возможность только локального усиления гипотез может быть, в частности, следствием реального отсутствия средств усиления или чрезмерной стоимости их получения).

Проблемы *адаптации комбинаторных алгоритмов* (АКА) характеризуются тем, что множество выходных записей каждой из них является множеством записей алгоритмов, а поиск решений производится в ограниченном условиями 1—3 классе алгоритмов, а именно, в классе алгоритмов адаптации. Алгоритмы адаптации предназначены для итеративного локального преобразования текущих гипотез-решений, направленного к последовательному улучшению этих гипотез относительно заданного оператора качества, и, в конечном итоге, к достижению искомых решений. Их уточнение проводится нами в классе алгоритмов предельных вычислений с оракулом. При этом исследования принципиальных возможностей алгоритмов адаптации с целью до-

стижения наибольшей общности результатов проводятся без конкретизации третьего из указанных ограничений (в частности, без установления порогов на число допустимых элементарных вычислений при каждом шаге усиления). В то же время при построении конкретных алгоритмов адаптации указанные ограничения вводятся в обязательном порядке, так как без них область исследований существенно расходится с требуемой.

Наши исследования класса проблем АКА условно могут быть разделены на две части.

В первой из них исследуются *проблемы расшифровки описаний* (ПРО), в которых множества выходных записей состоят из алгоритмов классификации некоторых заранее заданных и, вообще говоря, комбинаторных множеств элементарных описаний. Исследование классов ПРО интересно не только потому, что многие проблемы известны именно в такой форме, но и потому, что существуют основания считать возможным представление каждой комбинаторной проблемы в стандартной форме ПРО. Комбинаторность проблем обуславливает высокую специфичность поиска решений для каждой из них, что затрудняет обобщение достижений в отдельных проблемах, их сравнение, анализ и классификацию. Представление в форме ПРО позволяет предложить общий аппарат построения нижних оценок временной сложности проблем, ввести понятие типа сложности проблем—π (или σ)-переборность, на основе которой можно надеяться построить адекватную классификацию комбинаторных проблем, исследовать сравнительные характеристики различных классов алгоритмов адаптации и др. Эти результаты можно рассматривать как фрагмент общей теории адаптации, основанной на единообразном представлении комбинаторных проблем и операторе качества алгоритмов, конкретизированном в форме временной сложности.

В обширном многообразии проблем достаточно эффективные методы решения известны лишь для отдельных классов. При сведении новых проблем к сравнительно хорошо изученным говорят о *регуляризации* этих проблем. Широко известны, например, методы регуляризации некорректных проблем. В нашем представлении регулярные комбинаторные проблемы характеризуются наличием данных об общих свойствах множеств входных-выходных записей; наличием решений индивидуальных задач и соответствующих окрестностей входных-выходных записей, свойства которых легко вычисляются; возможностью планирования в множестве окрестностей входных записей разной степени исследованности и др. Вопросы адаптивной регуляризации комбинаторных проблем, или соответствующих разрешающих алгоритмов, составляют содержание второй части исследований. При этом уточнение условий локальности усиления, посредством введения специальных порогов на приращение оператора качества алгоритмов и число допустимых вычислений при каждом шаге усиления, определяет одну из разновидностей проблемы АКА, которая в дальнейшем исследуется для комбинаторных проблем управления.

Теория и методы АКА в настоящее время находятся в стадии становления, которая характеризуется отсутствием концептуального единства, слабой связью отдельных направлений исследований и т. п. Вследствие этого попытки построения единых объединяющих концепций неизбежно сопровождаются достаточно громоздкими техническими построениями, затрудняющими восприятие и анализ основных идей и результатов. Стремясь по возможности облегчить указанную задачу для читателя автор счел необходимым во введении сравнительно подробно изложить основное содержание каждой из глав работы.

Автор выражает глубокую благодарность всем, кто содействовал появлению данной работы. В их числе Г. Б. Маранджяну—за обсуждение и ряд ценных советов на разных стадиях выполнения исследований, О. А. Саркисян, Р. Г. Симоняну, Б. К. Карапетяну, А. А. Мартиросяну, М. А. Амбарцумяну, Ю. А. Арутюняну, Н. А. Аджабян, Л. О. Джндоян—за плодотворное сотрудничество при исследованиях методов адаптации, построении пакета программ и проведении экспериментов. Большую помощь при оформлении работы оказали М. А. Агамалова, Н. О. Аракелян, М. А. Хачатрян, Р. П. Горбушенко и Т. Л. Тунян.

ВВЕДЕНИЕ

1. *Глава I* посвящена классификации комбинаторных проблем. В § I дается общая постановка исследуемых нами комбинаторных оптимизационных проблем, которые формулируются в классе алгоритмов предельных вычислений с оракулом без указанных выше ограничений типа 3. Далее из них выделяются конечные проблемы класса L_1 с оператором качества типа временной сложности. Последняя понимается как суммарное количество элементарных вычислений и обращений к оракулу в процессе решения индивидуальных задач. Такое уравнивание «в правах» элементарных вычислений и обращений к оракулу позволяет рассматривать в пределах одного и того же класса как проблемы, не требующие обращений к оракулу (инициально полные), так и проблемы с обязательным обращением к оракулу (инициально пустые). К первому подклассу относятся, например, интенсивно исследуемые в настоящее время со сложностных позиций проблемы распознавания тавтологий от n-переменных, поиска логического вывода, поиска оптимальных комбинаторных управлений и др. Ко второму подклассу относятся как известные, сравнительно хорошо исследованные проблемы типа расшифровки автоматов, так и проблемы, постановки которых еще не совсем стабилизировались, но весьма актуальны, в частности, некоторые проблемы формирования образов или понятий. Указанные проблемы формулируются как требования к построению алгоритмов предельных вычислений с минимальными пиковой (π) или средней (σ) временными сложностями решения индивидуальных задач.

В § 2 дается постановка проблем расшифровки описаний (ПРО) и адаптации алгоритмов при ограничениях типа 1 (ПАКА1). Как было отмечено в предисловии, особенностью ПРО является возможность представления множества всех предполагаемых решений индивидуальных задач в форме описаний в некотором фиксированном алфавите элементарных описаний. Тем самым ПРО определяются конкретизацией следующих параметров: конечного множества описаний всех возможных решений заданной проблемы и множества всех элементарных компонент этих описаний, некоторого отношения между входными и выходными словами, списков элементарных вычислений, рассматриваемых для решения проблем алгоритмов и их вопросов к оракулу. В наших исследованиях ПРО рассматривается при опе-

раторе временной сложности, т. е. в классе $\underline{L}_1$ хотя в общей формулировке ПРО оператор качества алгоритмов может быть произвольным.

ПАКА1 определяется нами следующим образом: для заданных комбинаторной оптимизационной проблемы L, конечного множества U разрешающих алгоритмов для L, заданных порогов на обязательное приращение оператора качества гипотез-решений и на максимальное число допустимых элементарных вычислений при однократном применении некоторого алгоритма адаптации (усилителя) к произвольному f из U построить усилитель максимальной кратности применения к каждому f из U.

В настоящее время конкретные методы решения ПАКА1 неизвестны, что и является объектом наших исследований в последующих главах.

В § 3 рассматривается возможность сложностной классификации комбинаторных проблем на основе их представления в форме ПРО. Выделяется класс $\pi(\sigma)$- переборных ПРО, к которым причисляются проблемы, для которых $\pi(\sigma)$- сложность, т. е. пиковое или среднее число обязательных вычислений и обращений к оракулу больше мощности множества всех рассматриваемых элементарных описаний решений. В том же параграфе высокая сложность комбинаторных проблем уточняется через $\pi(\sigma)$- неразрешимость. Для таких проблем предполагается, что $\pi(\sigma)$- сложность даже относительно оптимальных алгоритмов непреодолимо велика. Из этого, в частности, следует, что все реально используемые алгоритмы в допустимое с практической точки зрения время не смогут построить точного решения некоторых индивидуальных задач или, другими словами, заключительные гипотезы алгоритмов предельных вычислений для них будут иметь малое правдоподобие. В этом случае критерий временной сложности, рассматриваемый изолированно от других критериев, теряет свою адекватность, поскольку ни при каких разумных ограничениях на время вычисления индивидуальных задач точные оптимальные решения не могут быть получены, и каждый реальный разрешающий алгоритм будет приближенным. Возникает проблема адекватной меры эффективности работы алгоритмов приближенного решения комбинаторных проблем и построения методов ее вычисления.

В качестве такой меры в § 4 предлагается пара векторов, первой компонентой которой является усредненная временная сложность решений индивидуальных задач, а второй—числовая оценка отклонений этих решений от оптимальных. Если провести аналогию между приближенным решением комбинаторных проблем и аппроксимацией аналитических функций, в частности, посредством их разложения в сходящиеся ряды, то введенной мере сложности можно было бы поставить в соответствие векторную сумму числа членов рассматриваемого конечного разложения и его среднеквадратического отклонения от точных значений функции. Относительно указанной меры вводится понятие оптимального алгоритма приближенного решения и доказывается его существование. Естественные упорядочения алго-

ритмов по этой мере не являются линейными, что вынуждает сравнивать алгоритмы по одной из ее компонент—среднему отклонению, при фиксированной другой. Обращаясь к отмеченной выше аналогии с аппроксимацией функций через ряды, предлагаемую постановку проблемы оптимизации приближенных решений можно сравнить с проблемой минимизации среднеквадратического отклонения при заданном ограничении на объем вычислений, производимых выделенным отрезком аппроксимирующего ряда. Однако трудность предлагаемого подхода состоит в том, что среднее отклонение является глобальной характеристикой, связанной с анализом решения каждой индивидуальной задачи. Тем не менее, для одной из комбинаторных проблем—поиска оптимального управления в шахматах в § 5 главы 4 приведены локально проверяемые достаточные условия усиления заданной разрешающей процедуры относительно вышеуказанного оператора качества алгоритмов.

Отметим, что так же как и в теории аппроксимации функций, где основной проблемой является развитие методов оптимальной аппроксимации, соответствующая теория, связанная с приближенным решением комбинаторных проблем, должна быть нацелена на развитие оптимальных методов приближенных решений. Наши исследования в этом направлении относятся к адаптивным методам регуляризации, вопросы построения которых будут обсуждены в дальнейшем.

Необходимо отметить, что предложенная в этой главе классификация проблем является всего лишь фрагментом общей. Она отражает с одной стороны область конкретных исследований автора, с другой—его стремление показать общность многих на первый взгляд разнородных проблем.

2. *Глава 2* посвящена исследованию вопроса представления комбинаторных проблем в форме ПРО. В § I показано, что каждая из отмеченных в п. 1 введения проблем класса L_1, а также ряд других, представимы в форме ПРО. Возможность представления через ПРО некоторых проблем, связанных с формированием образов позиций и закономерностей, рассматривается в главе 5.

Как уже отмечалось, алгоритмы предельных вычислений являются наиболее общей моделью процессов адаптации, индуктивного обобщения и др., и ПРО сформулированы именно в этом классе алгоритмов. В то же время при анализе возможности представления через ПРО известных в литературе проблем выясняется, что многие из них сформулированы каждая в своем специальном классе алгоритмов, общность которых не очевидна и требует доказательств.

В § 2—5 показано, что разрешающие процедуры указанных проблем составляют подкласс алгоритмов предельных вычислений—индуктивных выводов с индукторами, для которых проведена классификация в соответствии с решаемыми проблемами.

Индуктивные выводы с индукторами возникли как попытка построения по возможности минимального покрытия для тех известных

практически апробированных алгоритмов индуктивного обобщения, исследования которых в настоящее время почти не связаны друг с другом. Основное требование, предъявляемое в определении индуктора—увеличение числа классифицированных объектов по сравнению с той классификацией на множестве объектов, которая была задана в качестве исходной. При более сильных ограничениях получаем ряд специфических классов индукторов. В частности, потребовав, чтобы индукторы формировали гипотезы, не противоречащие исходной классификации, получаем класс так называемых *согласующих* индукторов.

Процесс индуктивного обобщения уточняется посредством понятий индуктивного вывода с обратной связью и без нее. Индуктивный вывод, по существу, есть последовательность применений заданного индуктора к входным записям. Условия применения индуктора заранее определяются и зависят, вообще говоря, от согласованности текущей гипотезы и вновь полученных данных о расшифровываемой паре множеств (ПМ). Первая компонента ПМ перечисляет те из элементарных описаний, которые в совокупности достаточны для однозначного распознавания исследуемого объекта, в то время как вторая—есть дополнение первой до выбранного базиса элементарных описаний.

В § 2 уточняются понятия индуктора, индуктивного вывода и критерии их оценки, а в § 3—5 показывается возможность представления в рамках указанной формализации алгоритмов формирования понятий по Э. Ханту; обучения 3-слойного персептрона; параметрической адаптации к распознаванию образов; расшифровки автоматов; методов формирования экстремального распознающего алгоритма; тестовых алгоритмов и др.

Заметим, что ограничения типа 3 на локальность усиления для указанных алгоритмов либо известны, либо уточняются естественным образом. Они не введены в определение индуктивных выводов, так как наши исследования относятся в основном к нижним оценкам сложности ПРО.

3. *В главе 3* исследуются вопросы оценки сложности проблем расшифровки описаний как в классе алгоритмов предельных вычислений в целом, так и в классах индуктивных выводов.

В § 1—3 рассмотрены вопросы построения нижних оценок сложности проблем расшифровки описаний при варьировании определяющих их параметров. Указанные оценки могут быть получены из общих соображений и влияние выбранной концепции алгоритма для них несущественно, в то время как верхние оценки требуют построения конкретных разрешающих алгоритмов и зависят от выбора алгоритмического языка.

В § 1 доказывается, что пиковая временная сложность одного из достаточно представительных инициально пустых классов проблем расшифровки описаний может быть оценена снизу длинами специально построенных для таких проблем минимальных тестов. Рассмат-

ривается также возможность расширения полученного вывода на класс всех проблем расшифровки описаний.

Полученная связь пиковой сложности с длинами минимальных тестов требует построения методов их оценки для таблиц с произвольным разбиением на классы. Два таких метода описаны в § 3. Они основаны на беспереборных алгоритмах решения следующих экстремальных комбинаторных задач:

1. Для заданных конечного множества M и целочисленных наборов $l_1, \ldots, l_k$ и $m_1, \ldots, m_k$ построить m_j подмножеств множества M мощности l_j при $j=1, 2, \ldots, k$, таких, чтобы все эти множества попарно не содержались бы друг в друге и чтобы для произвольного числа i число всех различных подмножеств мощности i, полученных из этих множеств, было бы наименьшим;

2. Для заданных конечного множества M мощности n и числа $m<2^n$ построить систему из m подмножеств M такую, чтобы число всех различных подмножеств мощности i^*, полученных из элементов этой системы, было бы наименьшим, где i^*—минимальное число i от 0 до n такое, что существует хотя бы одна система вышеуказанного типа с числом подмножеств меньшим, чем число всех подмножеств M мощности i.

Решения указанных задач сформулированы в § 2, а полное доказательство теорем будет опубликовано отдельно в связи с самостоятельным интересом развитого комбинаторного аппарата, предназначенного для исследований свойств подмножеств конечных множеств и выходящего за рамки АКА.

В § 4 исследуется сложность расшифровки описаний в классе индуктивных выводов и индукторов. В частности, в следствии 1 к теореме 6 утверждается, что для произвольного индуктора существуют ПМ, индуктивный вывод которых имеет максимально возможную сложность. При этом максимум достигается в одном из классов проблем расшифровки описаний при специальном выборе обучающей последовательности.

Указанное следствие в определенном узком смысле отрицает существование оптимального индуктора в индуктивных выводах. Можно было бы предположить, что оптимальный индуктивный вывод окажется возможным, если брать не фиксированную заранее обучающую последовательность, а такую, которая порождается по определенным правилам в самом процессе вывода. Например, обучающая последовательность может строиться в форме ответов на вопросы, которые задает ученик учителю в процессе усвоения некоторого понятия, задуманного учителем. Такой процесс соответствует индуктивному выводу с обратной связью от информации, полученной на предыдущем шаге, и соответствующей гипотезы, построенной для нее.

В теореме 7, однако, показано, что для индуктивных выводов, использующих согласующие либо несогласующие индукторы, не существует оптимальных алгоритмов, порождающих вопросы к «учителю».

Далее рассматриваются вопросы сравнительной оценки сложности классов ПМ относительно индуктивных выводов с согласующими либо несогласующими индукторами. Требование согласования встречается во многих алгоритмах индуктивного обобщения и потому заслуживает специального внимания. Согласующие индукторы нами сравниваются с несогласующими. В частности, теорема 8 описывает некоторый достаточно естественный класс согласующих индукторов, которые расшифровывают произвольный класс ПМ не лучше несогласующих. В теореме 10 показано, каким образом для некоторых множеств ПМ (фактически—для произвольных множеств) может быть построен несогласующий индуктор, который почти во всех случаях будет расшифровывать это множество правильнее, чем некоторый согласующий индуктор. При этом, как доказано в § 5, указанное свойство сохраняется, если требовать лишь частичного совпадения гипотез с искомой ПМ с точностью до заданного порога. В теореме 9 утверждается, что возможны множества, оптимальную расшифровку которых можно произвести либо только согласующими, либо только несогласующими индукторами. Последняя теорема, по-видимому, и должна определять наше отношение при выборе между согласующими и несогласующими индукторами в конкретных задачах индуктивного обобщения.

В теоремах 11—15 анализируется сложность решения отдельных классов ПРО1, в частности, симметрических и монотонных, посредством индуктивных выводов с 1-индукторами, без обратной связи и с ней.

4. *В главах 4—6* рассматриваются вопросы построения конкретных алгоритмов адаптации для сформулированной выше проблемы АКА с ограничениями типов 1 и 2. При этом в качестве множества входных адаптируемых алгоритмов, рассматривается множество решений проблем оптимального комбинаторного управления, точнее модельного представителя подобных проблем—шахматной игры.

Исследуемые проблемы оптимального комбинаторного управления (ПОУ) определяются пятерками $\langle S, C, D, \boldsymbol{M}, Q\rangle$, где S, C, D, Q— произвольные конечные множества, соответственно, ситуаций, управлений, возмущений и целевых ситуаций (выигрышных, проигрышных, ничейных), а $\boldsymbol{M}$—частичное отображение $S\times C\times D$ в S, описывающее допустимые последовательности воздействий управлений и возмущений на ситуации (правила игры). Произвольное отображение из $S\setminus Q$ в C называется алгоритмом поиска управлений, если из $f(s)=c$, при $s\in S$, $c\in C$, следует, что $\exists d\in D\ \exists s'\in S\ \ (s, c, d, s')\in \boldsymbol{M}$. Аналогично определяются алгоритмы поиска возмущений. Предполагается, что управления и возмущения последовательно воздействуют на заданные ситуации для перевода их в целевые ситуации множества Q. Тогда каждая пятерка указанного вида определяет некоторое ориентированное дерево возможностей (дерево игры), в котором вершинами являются ситуации множества S, исходящие ребра в каждой из них указывают на допустимые в них управления либо возмущения (соот-

ветственно ярусу дерева), а также ситуации, в которые преобразуются исходные ситуации.

Для произвольной ситуации P дерева возможностей Г стратегией G из P или P-стратегией называется произвольное поддерево G дерева Г с корнем P такое, что в i-ом ярусе G:

1) при очередности воздействия управлений из каждой вершины этого яруса исходит не более одного ребра, указывающего на одно из допустимых в ней управлений согласно $\boldsymbol{M}$;

2) при очередности применения возмущений из каждой вершины этого яруса исходят либо все допустимые в ней возмущения, либо ни одно.

P-стратегия называется наиболее выигрышной в ситуации P, если для выигрышной или ничейной P стратегия G обеспечивает выигрыш или ничью независимо от алгоритмов поиска возмущений, а для проигрышной P стратегия G удовлетворяет условию $\min\limits_{x \in G_P} \alpha(x)/\beta(x)$, где G_P—множество всех P-стратегий с известным выигрышем одного из противников, $\alpha(x)$-- число проигрышных, $\beta(x)$—число выигрышных или ничейных концевых вершин P-стратегии x. Оптимальным управлением в ситуации P называется первое управление произвольной наиболее выигрышной P-стратегии.

ПОУ определяется как проблема построения алгоритма поиска оптимальных управлений (в произвольных заданных ситуациях множества S) одновременно оптимального относительно заданного оператора качества алгоритмов, в частности, временной сложности.

5. В последующих главах изучается возможность комбинаторной регуляризации в рамках проблемы АКА.

В главе 4 в соответствии с представлениями о регулярных комбинаторных проблемах формулируются исходные предположения о структуре оптимальных алгоритмов управления и основные вопросы их построения, рассматриваются возможности обнаружения относительного усиления и разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов.

После описания в § I алгоритмов комбинаторной регуляризации и основных этапов их исследования в § 2 дается обоснование выбора шахматной игры (ПОУ^{ш}) в качестве проблемы-посредника при изучении методов комбинаторной регуляризации для проблем класса ПОУ. Обоснование исходит из общих требований к проблеме-посреднику, а именно: требованиям принадлежать классу исследуемых проблем, допускать исследования в целом, как некоторой замкнутой системы, быть по возможности общедоступной, позволять многократное воспроизведение всех этапов решений, допускать разбиение на подзадачи регулируемой сложности, располагать архивом описаний разных попыток ее решений и др., которым ПОУ^{ш} удовлетворяет. Предполагается, что различные методы решения ПОУ могут быть проинтерпретированы для ПОУ^{ш}, сверены с другими аналогичными методами и

оценены. Оптимальные методы, найденные таким путем, вновь ретранслируются на исследуемые проблемы.

В § 3 формулируется *гипотеза* 1 об оптимальном алгоритме f^* решения ПОУ^{ш}, исходя из которой выделяется класс адаптируемых алторитмов $\boldsymbol{B}_1$ (входных-выходных записей в ПАКАI). Предполагается, что f^* основан на подпрограммах поиска по каждой заданной позиции оптимальных управлений из множества записей W, содержащих все такие управления; при этом релевантность управления к заданной позиции распознается не более чем за $\log_2 r$ элементарных вычислений, где r имеет порядок числа всевозможных допустимых передвижений фигур на доске и не превышает $5 \cdot 10^4$.

Из гипотезы 1 следует, что произвольный алгоритм f_0 из $\boldsymbol{B}_1$ естественно представить как систему $\langle\theta(W), f_{01}, f_{02}, f_{03}\rangle$, где $\theta(W)$ — тезаурус (упорядоченное множество W записей типов: алгоритмы, тексты, формулы), f_{01} и f_{02}—алгоритмы поиска записей в тезаурусе и стратегий в графе возможностей для ПОУ^{ш} соответственно, f_{03}— координатор взаимосвязи f_{01}, f_{02}, входных-выходных устройств. Алгоритм f_0 отображает ситуацию S в управление в S, алгоритм f_{01}—S в подмножество записей, f_{02}—пары (S; список записей) в управление в S. При этом как f_{01}, так и f_{02} могут быть разрешающими алгоритмами для ПОУ^{ш}.

Данное представление проблемы оптимизации f_0 порождает подпроблемы ее локальной оптимизации, основанные на изменении одних компонент f_0 при фиксированных других. Наши исследования АКА в значительной степени связаны с одной из них—*проблемой накопления, организации и поиска записей в тезаурусе* (НОПТ), в которой при заданных координаторе f_{03} и алгоритме поиска в графе f_{02} требуется выбрать множество записей W', построить такие тезаурус $\theta'(W')$ и алгоритм f'_{01} поиска из $\theta'(W')$ записей по прозвольным ситуациям-запросам, чтобы для произвольной другой пары $\langle\theta(W), f_{01}\rangle$ того же назначения выполнялось бы неравенство: $\langle\theta'(W'), f'_{01}, f_{02}, f_{03}\rangle \geqslant \langle\theta(W), f_{01}, f_{02}, f_{03}\rangle$, где упорядочение $\geqslant$ порождается оператором качества алгоритмов в ПОУ^{ш}. Было бы естественно записи тезауруса $\theta'(W')$ считать уточнением понятия знаний относительно алгоритма f_{02}. Однако, поскольку вопрос эффективного использования критерия принадлежности записей к W' остается открытым, понятие „знание“ определяется нами в терминах более локально проверяемых характеристик записей. А именно, *знанием* относительно заданных ситуации s и алгоритма f_{02} называется произвольная запись w такая, что замена исходной входной записи $\langle s, \varnothing\rangle$ для f_{02} на $\langle s, w\rangle$ при прочих равных условиях приводит к усилению f_{02}. В дальнейшем предполагается, что решение НОПТ в первом приближении основано на накоплении и организации именно таких знаний.

В § 4 формулируются ожидаемые результаты и актуальные проблемы теории АКА. Исследования проблемы АКА направлены на построение эффективных алгоритмов адаптации. Соответствующая

теория должна выявить принципиальные возможности таких алгоритмов и указать области их наиболее перспективного поиска. Здесь можно выделить следующие проблемы.

1. Классификация преобразователей и выявление их принципиальных возможностей при усилении алгоритмов (теоремы существования).

2. Построение усилителей заданного типа, в частности, основанных на накоплении знаний. В этом случае возникают вопросы выделения структур знаний и их классификации, а также вопросы построения алгоритмов синтеза знаний заданного типа и оценки сложности их работы.

3. Оценка качества усилителей.

4. Выбор оптимальных усилителей для заданных исходных алгоритмов.

5. Построение оптимальных усилителей для разрешающих процедур в проблемах-посредниках.

6. Возможность применения методов усиления в проблемах-посредниках для других проблем соответствующего класса.

Как было отмечено ранее измерение среднего отклонения при поиске приближенных решений оптимизационных комбинаторных проблем нетривиально и связано с оценкой отклонений решений индивидуальных задач от искомых, как правило, для очень большого числа таких задач. Поэтому практическое использование этого критерия возможно только для таких оптимизационных проблем, в которых удается указать локально проверяемые методы его оценки. В § 5 описано решение этой проблемы для шахматной игры. Оно основано на предположении о том, что доли выигрышей, ничьих и проигрышей заданного алгоритма поиска управлений f в играх с произвольными другими алгоритмами при фиксированной начальной позиции P прямо пропорциональны долям концевых вершин соответствующих типов в стратегии, порожденной f из P. Тем самым проблема сравнения «силы» двух заданных алгоритмов f_i и f_j сводится к проблеме установления относительного расположения этих алгоритмов в последовательности, полученной линейным упорядочением шахматных алгоритмов по результатам абсолютного турнира. Последний же понимается как круговой турнир между всевозможными шахматными алгоритмами, когда каждая пара алгоритмов встречается в матче при специальных условиях, обеспечивающих отсутствие априорных преимуществ какому-либо из них, вытекающих из характера организации матчей.

Принимая гипотезу о том, что в соответствии с местом i заданного алгоритма f_i в абсолютном турнире можно указать константу c_i такую, что влево от окрестности $[i+c_i,\ i-c_i]$ f_i только проигрывает, вправо—выигрывает, а в самой окрестности может как выигрывать, так и проигрывать, доказана следующая теорема: для произвольных алгоритмов f_i и f_j, если f_j выигрывает матч у f_i и существует такое множество алгоритмов F', что мощ-

ность F' больше c_i, f_j выигрывает, а f_i проигрывает матч с каждым алгоритмом из F' в абсолютном турнире для $F' \cup \{f_i, f_j\}$, то f_j сильнее f_i.

Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда матч f_i с f_j оканчивается ничьей. Тем самым вопрос проверки усиления заданного алгоритма f_j относительно исходного f_i сводится к построению множества F' и оценке параметра c_i. Даже при отсутствии оценки для c_i можно утверждать: чем больше $|F'|$, тем вероятнее, что f_j сильнее f_i. Последнее утверждение дает необходимые основы для экспериментального исследования усилителей.

В 1950 г. К. Шеннон сформулировал проблему построения «самоулучшающейся программы», «вырабатывающей собственные принципы игры». В § 6 доказывается разрешимость проблемы Шеннона, формализованной в виде требования о построении метода адаптации шахматных алгоритмов при «разумных» ограничениях на стоимость каждого шага адаптации. Соответствующая проблема получается из ПАКА1 снятием требования о строго последовательном усилении гипотез при каждом акте их преобразования. Разрешимость же доказывается в предположении о том, что класс шахматных алгоритмов задается посредством некоторого исчисления с конечным числом правил вывода. Последнее позволяет построить процедуру перечисления всех сочетаний из $2 \max_i c_i$ шахматных алгоритмов и, последовательно проверяя в них наличие более сильного алгоритма, чем текущий алгоритм—гипотеза, в пределе с определенной точностью построить оптимальный. Возможность же необходимых локальных проверок следует из приведенной выше теоремы.

Теорию АКА можно отнести к разделу общей теории алгоритмов, исследующей вопросы алгоритмической оптимизации. Однако на данной стадии развития общей теории сформулированные выше проблемы АКА либо вообще не рассматривались, либо отражены в косвенной форме. В сравнительно большей степени возможности адаптации изучены для отдельных комбинаторных проблем, в частности, для поиска логического вывода, игр, ситуационного управления и др. Развитой ветвью общей теории является теория адаптации параметрических алгоритмов. В § 7 рассмотрены некоторые известные типовые теоремы теории ускорения алгоритмов, а также достижения по усилению игровых алгоритмов и алгоритмов поиска логического вывода. Из приведенного анализа, в частности, следует, что в теории поиска логического вывода в разной степени выявлены большинство основных направлений итеративного усиления алгоритмов, по которым получены ряд фундаментальных результатов. В то же время в этой теории утверждения получены в предположении, что исследуемые проблемы представимы в форме исчислений; критерии качества определены для точного вывода и используют разнородные компоненты; отсутствуют формулировки проблем синтеза инвариантов, пополнения языка и др., что требует дальнейших исследований.

Для игровых алгоритмов известны попытки построения усилителей, основанных на накоплении закономерностей и настройки весов оценочной функции. В начальной фазе находятся работы по расширению языка описаний и извлечению закономерностей из текстов; критерии усиления основаны на подражании турнирам без их математического обоснования и др.

Исследования по формированию образов ситуаций в нашем представлении должны проводиться в рамках решения НОПТ. Однако традиционно эта проблема рассматривается изолированно, вне связи с порождающей ее исходной оптимизационной проблемой, что в свою очередь приводит к слишком обобщенным и потому неэффективным критериям оптимальности образов. В последующих главах 5, 6 исследуется возможность устранения некоторых из выявленных пробелов в теории и методах АКА, в частности, связанных с проблемой формирования образов ситуаций.

6. *В главе 5* рассматриваются вопросы представления, синтеза и комплексного использования ряда структур, для которых имеется достаточно оснований относить их к знаниям. Для наглядности изложения каждой такой структуре, именуемой <знанием>, дается шахматная интерпретация.

<Знания> представлены нами через разновидности записей типа формул, текстов, алгоритмов. В § 1 определяются <знания>, используемые при распознавании индивидов одинакового назначения. С этой целью рассматриваются формулы языка первого порядка L с конечным числом функциональных и предикатных символов. Структура $\boldsymbol{A}^*$ для L определяется естественным образом для конечного универсума $\boldsymbol{A}$, что позволяет каждую формулу языка $L(\boldsymbol{A}^*)$, полученного добавлением к L имен всех индивидов из $\boldsymbol{A}$, представить в эквивалентной конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.). В множестве индивидов различаются простые (пешка, клетка) и составные (позиция, стратегия). Для последних вводится понятие разложения на простые. Так, разложение заданной позиции P «король и пешка против короля» есть множество, составленное из имен самой позиции P, всех пар из P вида <координаты клетки, фигура на той же клетке>, перечня всех фигур и клеток в P.

Полное описание заданного *индивида* a понимается как множество всех неэквивалентных истинных на разложении a к. н. ф. с хотя бы одним вхождением в них имени из разложения a. *Частичное описание* a или просто *описание* a есть произвольное подмножество полного. Описание индивида интерпретируется как сообщение о наличии вполне конкретного индивида.

Формула E языка $L(\boldsymbol{A}^*)$ называется *описанием* в $\boldsymbol{A}^*$, если E применимо хотя бы к одному индивиду из универсума; множество всех индивидов, к которым E применимо, называется *E-классом*. Описания определяют дескрипторы выделения индивидов одинакового в определенном смысле типа.

В § 2 определяется частичный порядок θ_1 на множестве всех

описаний—*отношение* выигрышности, а также понятия $\langle P, F, l\rangle$-*стратегий* и их объединений. Отношение θ_1 отражает объективно существующий порядок на множестве индивидов, в частности, ситуаций, относительно их возможностей и связей с целевыми ситуациями ПОУ, а также наше наличное знание этого порядка и способность к его конкретному использованию.

$\langle P, F, l\rangle$-стратегии определяют P-стратегии, концевые вершины которых имеют описания не хуже F относительно упорядочения θ_1 и одновременно это свойство в каждой такой вершине x сохраняется до глубины не менее l посредством навешивания в них дополнительных x-стратегий. $\langle P, F, l\rangle$-стратегии и их объединения описывают знания типа комбинация, форсированный вариант, эндшпильная стратегия и др.

$\langle$Знания$\rangle$ типа цели понимаются нами как описания ситуаций, определенным образом связанных с достижением целевых ситуаций исследуемой проблемы. Сами же процедуры, определяющие связь рассматриваемых ситуаций с другими ситуациями известной ценности, как описания некоторого смысла этих ситуаций. Индуктивное определение § 3 уточняет понятие цели в ПОУ^{ш} следующим образом:

1) произвольное описание E целевых позиций ПОУ^{ш} одного и того же типа, называется $\langle E, l^*\rangle$-*целью* или *глобальной целью*, где l^*—константа порядка глубины дерева игры;

2) пусть F—$\langle F_1, l_1\rangle$-цель, где F_1—описание ситуаций, а $l_1 \leqslant l^*$; произвольное описание E называется $\langle F, l\rangle$-*целью* или *локальной целью*, если при мощности E-класса равной m можно указать натуральные числа n и l такие, что $n \leqslant m$ и для каждой позиции P E-класса с частотой n/m существует некоторая $\langle P, F, l\rangle$-стратегия.

Данное определение целей одновременно является некоторой гипотезой о способе их порождения.

Произвольная конечная последовательность целей, согласованная с отношением выигрышности θ_1, понимается как *план*. В § 4 произвольная$\langle F, l\rangle$-цель E называется $\langle F, l\rangle$-*образом позиций,* если описание E является тупиковым, т. е. никакие подмножества дизъюнктов к. н. ф. E или частей этих дизъюнктов свойством быть $\langle F, l\rangle$-целью при том же E-классе позиций не обладают.

Определение $\langle F, l\rangle$-образа позиций характеризует шахматные понятия через цели „в улучшенном“ представлении. Данная гипотеза хорошо согласуется с результатами нашего анализа более 200 шахматных понятий и позволяет взглянуть на проблему синтеза образов с позиций, отличных от традиционных.

В определении *оптимального* $\langle F, l\rangle$-*образа* E^*, как следствие гипотезы 1, хотелось бы учесть три не всегда совместимых требования: максимальные мощность и частоту существования $\langle F, l\rangle$-стратегий для E^*-класса позиций, при одновременно минимальном времени распознавания принадлежности позиций к этому классу. Поэтому E^* понимается как $\langle F, l\rangle$-образ с максимальной частотой

существования $\langle F, l\rangle$-стратегий и такой, что при наибольшей мощности E^*-класса длина записи E^* минимальна.

Вопросы, связанные с уточнением понятий „смысл ситуаций“ и „смысл описаний“, относятся в информатике и теории управления к весьма трудным. В рамках ПОУ^{ш} $\langle F, l\rangle$-*смысл позиции* P нами уточняется как произвольная $\langle P, F, l\rangle$-стратегия, а *смысл описания* E — как каждый из $\langle F, l\rangle$-смыслов каждой позиции E-класса. Понять описание E означает располагать каким-либо смыслом позиций E-класса, а в полный смысл E естественно включить совокупность всех смыслов позиций E-класса.

Для представления знаний о том, какие цели являются необходимыми этапами при достижении заданной, в § 5 вводятся частичное упорядочение θ_2 — „*цель-подцель*“, отношение θ_3 — „*часть-подчасть*“, указывающее на подформулы и их связи с заданным описанием, а также отношение θ_4 — „*мотив-цель*“, отмечающее описания, выполнение которых дает некоторые основания предполагать, что и связанные с ними цели будут выполнены.

При поиске P-стратегий область поиска может быть существенно сужена, если заранее известно, какие цели в P достижимы и с какой достоверностью. Для оценки гипотез этого типа вводится функция $z(F, P)$ *правдоподобия цели F в позиции P*, или релевантности позиции P к цели F), $0 \leqslant z(F, P) \leqslant 1$, которая призвана отражать причинно-следственные связи между выполнением определенных элементов F и возможностью достижения F посредством некоторой P-стратегии. Конкретная функция отражает наши знания о характере этих связей и использует взвешенные графы цель-подцель мотив-цель.

Вышеуказанные типы $\langle$знаний$\rangle$ в том или ином виде являются компонентами *закономерностей*, которые в § 6 определяются как тексты вида $u \Rightarrow v$, где u — распознаватель, а v — следствие закономерности. u и v — формулы в расширении L^0 языка L, полученном введением в него предиката выигрышности, функций правдоподобия целей и формирования описаний индивидов. Распознаватели являются описаниями ситуаций, а следствия — описаниями объединений стратегий из ситуаций, указанных в распознавателе.

Нами выделены 8 типов закономерностей. Так закономерности типа 0 фиксируют тот факт, что применение определенного объединения стратегий к ситуациям распознавателя обеспечивает достижение заданной цели в них. Закономерности типа 1 могут быть интерпретированы, например, следующим образом: „для каждой позиции x, если F_1 — описание, применимое к x, то существуют x-стратегии, для которых справедливо описание F_2“; например, „король и ферзь объявляют мат королю за не более чем 9 ходов“ и др.

Оператор достоверности η для заданной закономерности $u \Rightarrow v$ указывает на отношение числа всех истинных в рассматриваемом универсуме частных случаев $u \& v$ к аналогичному числу для u. Закономерность R является детерминированной или ложной соответственно

при $\eta(R)$ равном 1 или 0. В остальных случаях R недетерминированная. Если $\eta(R)$ неизвестна, то R называется эвристикой. Заметим, что закономерности аналогичны допустимым правилам при поиске логического вывода.

Как было отмечено ранее, вопрос о том, является ли та или иная запись тезауруса знанием, решается в контексте структуры конкретного алгоритма управления. Однако представляется, что можно выделить ряд контекстно независимых требований, позволяющих сформулировать автономные проблемы синтеза записей со многими предпосылками быть знаниями. В § 7 рассмотрены возможности постановки таких проблем.

Проблемы синтеза элементов языка рассматриваются в основном для формул типа „образы ситуаций". Отличие нашей постановки проблемы синтеза образов (ФОС3) от традиционной (ФОС2) в том, что, если в ФОС2 основной информацией об искомом образе являются указания о принадлежности отдельных заданных описаний ситуаций к образу, то в ФОС3 в исходную информацию дополнительно включается принцип, по которому ситуации объединяются в один и тот же образ, а именно, их общий $\langle F, l\rangle$-смысл или процедура перехода от ситуаций образа к целевым ситуациям с описанием F.

Задание $\langle F, l\rangle$-целей как основных характеристик образов позволяет синтезировать их и без обращений к оракулу, посредством проверки возможности порождения $\langle F, l\rangle$-стратегий в исследуемых ситуациях. Представляется, что ФОС3 формализует процессы синтеза образов по единичным примерам ситуаций с известной степенью их полезности. Согласованность же этой проблемы с НОПТ определяется выбором множества его решений в форме оптимальных $\langle F, l\rangle$-образов. Проблема синтеза целей уточняется посредством обобщения ФОС3. В свою очередь последовательность порождения целей характеризует процесс синтеза отношений „цель-подцель" и „выигрышность".

Постановка проблемы синтеза $\langle P, F, l\rangle$-стратегий во многом аналогична ПОУ. Совместно с ФОС3 она позволяет уточнить проблему синтеза закономерностей типа 0.

Заметим, что в вышеуказанных проблемах входные записи и синтезируемые могут быть одного и того же типа. Возможный порочный круг избегается тем, что исходные входные записи таких проблем задаются априори при постановке самой ПОУ.

Ранее в § 3 главы 3 была установлена определенная связь между параметрами инициально пустых ПРО и нижними оценками $\pi(\sigma)$-сложности этих проблем. Используя выводы соответствующей теоремы, в § 8 проводится сравнительный анализ проблем формирования образов ситуаций, эквивалентных по множеству искомых решений, но имеющих либо традиционную постановку (ФОСI, 2), либо порожденную нами из проблем оптимального комбинаторного управления (ФОС3). В частности, можно полагать, что $\pi(\sigma)$–сложность уменьшается при уменьшении отношения числа недопустимых решений к об-

щему числу всех решений, а также при переходе от инициально пустых проблем к полным.

В соответствии с определенными выше <знаниями>, алгоритмы управления описанного ранее класса $\mathbf{B}_1$ должны быть детализированы таким образом, чтобы их работа основывалась на совместном анализе и учете всех этих <знаний>, что в свою очередь должно обеспечить возможность их адаптации в рамках решения НОПТ. Необходимая детализация и описание процесса использования <знаний> на уровне блок-схемы проведены в § 9. Полученные алгоритмы управления образуют подкласс $\mathbf{B}_1$ и состоят из следующих основных блоков: 1) формирование области целей, релевантных к заданной ситуации, и вычисление правдоподобия каждой из них; 2) выделение целей наиболее правдоподобных и одновременно выигрышных; 3) формирование справки к анализируемой ситуации на основе поиска <знаний> в тезаурусе; 4) анализ справки с переходом либо к выдаче управления на основе справки, либо к синтезу собственной стратегии; 5) формирование пучка планов на основе разложения текущей цели относительно графов «цель-подцель», «часть-подчасть» и их анализа; 6) непосредственный синтез стратегий по заданной цели; 7) выполнение управления; 8) координация последовательности управлений, возмущений и останова.

Эксперименты по программной реализации алгоритмов управления указанного класса представлены частично в следующей главе (полностью они отражены в отчетах ВЦ АН АрмССР).

7. *В главе 6* рассматриваются структура пакета программ для исследований усилителей с помощью ЭВМ, эксперименты по построению конкретных алгоритмов управления с комплексным использованием различных типов «знаний», а также вопросы приложений и связей полученных результатов с известными проблемами.

В § 1 приведено краткое описание проблемно-ориентированного пакета прикладных программ АКА1, предназначенного для исследований с помощью ЭВМ возможностей доказательства либо опровержения гипотез, связанных с АКА управления. Процедуры проверки гипотез специализированы для шахматной проблемы-посредника с целью последующего обобщения полученных результатов на более широкий класс комбинаторных проблем управления.

В § 2 описаны результаты экспериментального исследования на основе пакета АКА1 возможности распознавания наиболее правдоподобных в анализируемых ситуациях целей из заданного списка. Принцип действия соответствующего алгоритма основан на идее оценивания в отрезке [0,1] степени выполненности компонент формулы, представляющей цель, а также тех или иных мотивов, связанных с достижением этой цели. Для каждой из 36 рассмотренных шахматных целей построены схемы вычисления правдоподобия, которые являются взвешенными графами типа и/или с определенной упорядоченностью обхода вершин и с концевыми вершинами—атомарными формулами, описаниями целей или мотивов их достижения. Число таких формул

в реализованных нами схемах достигало 360 при глубине схем порядка 14.

Эффективность работы алгоритма вычисления правдоподобия целей проверялась посредством сравнения оценок правдоподобия заданных целей, построенных соответствующей программой для тестовых позиций, с аналогичными оценками экспериментаторов. Результаты сравнений показали принципиальную возможность применения процедур рассмотренного типа в алгоритмах поиска управлений.

В § 3 рассмотрены мотивы выбора закономерностей типа „правдоподобные цели $\Rightarrow$ рекомендуемые решения“ и приведены результаты экспериментов по их алгоритмическому построению. Распознаватели указанных закономерностей выделяют в анализируемой позиции x те из целей заданного списка, достижение которых в x наиболее правдоподобно. В соответствии с выделенными в x целями $F_1, \ldots, F_m$ в множестве заданных ситуаций с известными в них ранее принятыми решениями, направленными на достижение одной из целей $F_1, \ldots, F_m$, производится поиск такой ситуации y, чтобы решение c_y в y возможно было стандартным образом преобразовать в некоторое решение c_x, применимое к x и направленное на достижение в x одной из тех же целей $F_1, \ldots, F_m$.

Эксперименты проводились на основе партий шахматного сборника «Информатор» и показали достаточную осмысленность синтезированных закономерностей для их возможного использования при усилении алгоритмов управлений.

В настоящее время проблема построения общепризнанных систем для эталонизированных сравнений и оценок информационных структур систем управлений остается весьма актуальной. Применение метода моделирования для указанной цели не всегда возможно, т. к. большинство практических задач не имеют адекватных моделей. Проблемы-посредники для класса однотипных проблем в определенной степени могли бы компенсировать отсутствие моделей. Однако слабая формализованность практических проблем весьма часто затрудняет их сравнение и выбор типовых. Система SMART, Кренфилдский проект при всей их значительности не решают поставленного вопроса, в частности потому, что они основаны на использовании экспертных оценок, что вносит в их результаты определенную долю субъективизма и практически лишает возможности повторения—основы научных исследований.

Предлагаемый в § 4 метод сравнения свободен от последнего недостатка. Его прототипами являются турниры различных типов, в том числе и турниры шахматных программ. Однако в отличие от них ставилась цель организовать турнир алгоритмических и информационных возможностей систем в чистом виде, в то время как известные турниры либо не ставят, либо неспособны решать задачи дифференцированного сравнения отдельных компонент систем с возможностью повторения полученных результатов.

Предложенный метод возник из попытки ответить на следующий вопрос: возможен ли оптимальный (в смысле глобальных оценок) выбор системы управления из заданного класса $\boldsymbol{K}$ при решении задачи Г, если исследуется не $\boldsymbol{K}$ в Г, а некоторая модельная система, в состав которой входят модели $\boldsymbol{K}'$ для элементов из $\boldsymbol{K}$ и задача Γ_1, вообще говоря отличная от Г, но удобная для исследований. При этом предполагается, что в Г и Γ_1 используются однотипные глобальные оценки.

Пусть в Γ_1 предусмотрена возможность порождения возмущений и R—множество алгоритмов поиска возмущений моделей из $\boldsymbol{K}'$. Допустим, что в Γ_1 задано достаточно представительное множество тестовых ситуаций H, априори не дающих преимущества ни алгоритмам управления, ни алгоритмам возмущения. Выбор оптимальной системы управления производится по результатам противопоставления моделей из $\boldsymbol{K}'$ в некотором специальным образом выбранном турнире, использующем сбалансированное множество конфликтных ситуаций из H. Эффективность указанной процедуры определяется степенью правдоподобия следующей гипотезы: если модель $K^{*\prime}$ является оптимальной в $\boldsymbol{K}'$ при решении Γ_1 для большинства начальных ситуаций из H и алгоритмов возмущения из R, то образ $K^{*\prime}$ в $\boldsymbol{K}$ будет оптимальным в $\boldsymbol{K}$ при решении Г.

В том же параграфе рассмотрены факторы, влияющие на правдоподобие этой гипотезы, а также перечислены некоторые возможные области применения метода турниров. Предварительно описан предлагаемый нами подход к идентификации систем управления.

В § 5 анализируется возможность взаимодействия теории и методов АКА с генетической психологией, развиваемой Ж. Пиаже и его последователями. Рассмотрены основные положения этой теории относительно развития познавательных структур человека и сделана попытка их интерпретации в рамках методов комбинаторной регуляризации. Сформулирован ряд утверждения относительно АКА, формализующих некоторые основные положения генетической психологии, в частности, о возможностях механизмов развития при вариациях исходных структур. Если принять правомерность аналогии между АКА и развитием познавательных структур, то можно сказать, что генетическая психология обогащается возможностью модельного экспериментирования в рамках теории и методов АКА. В свою очередь психологические данные могут послужить основой развития теории и методов АКА.

Краткие исторические справки об исследуемых вопросах даются в соответствующих разделах.

В заключение работы приводятся списки сокращений и упомянутой литературы. Нумерация параграфов, также как рисунков, теорем, лемм и следствий к ним, проведены по главам, и при ссылках указывается номер этой главы. Например, запись «§ 2.3» означает ссылку на § 2 главы 3.

Глава I

К КЛАССИФИКАЦИИ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОБЛЕМ

§ 1. Комбинаторные оптимизационные проблемы

1. Современная стадия развития методов решения оптимизационных проблем характеризуется специализацией этих методов для отдельных его классов. Наши исследования методов решения комбинаторных проблем также будут проводиться для выделенных классов. В данном параграфе дается постановка комбинаторных проблем в общей форме, из которых затем выделяются проблемы с оператором качества типа временная сложность, инициально пустые и полные, адаптационные, синтеза алгоритмов и др.

2. Наиболее общим известным нам классом алгоритмов, удовлетворяющим перечисленным в предисловии ограничениям, является класс алгоритмов предельных вычислений с оракулами.

Алгоритмы предельных вычислений (АПВ) формализуют процедуры итеративного усиления гипотез—решений индивидуальных задач в условиях быть может отсутствия рекурсивного представления операторов качества решений этих задач. Они систематически исследовались Э. М. Голдом, Х. Патнамом, Л. Блюмом, М. Блюмом, Дж. Шенфилдом, Я. М. Барздинем, Р. В. Фрейвалдом и др. [123]). Отдельные подклассы АПВ рассматривались другими авторами: параметрической адаптации в [126, 127] и др., расшифровки автоматов в [116], формирования понятий в [124], индукторов и индуктивных выводов в [86] и др. (см. также главу 2).

В [123] АПВ определяются посредством машин Тьюринга следующим образом. Машина имеет входную, выходную и рабочую ленты. На входной ленте указываются записи из некоторого фиксированного множества, а рабочая и выходная ленты в начале работы пустые. Выходная головка является пишущей, двигается только вправо и печатает последовательность натуральных чисел—номера гипотез с разделительными знаками между ними. Запись числа закончена, если за ним следует хотя бы один разделительный знак. В противном случае число не учитывается. *Пределом конечной последовательности гипотез* называется ее последнее число; если последовательность бесконечна и начиная с некоторого числа b неизменна, то b есть этот предел; в остальных случаях последовательность не имеет предела.

Нами будет рассматриваться универсальная машина Тьюринга, способная работать как любая частная машина Тьюринга, если на ее входную ленту нанести в определенном коде программу этой частной машины. Такое рассмотрение должно позволить избежать при сравнении АПВ эффекта мнимого понижения сложности вычислений (временной, объемной) за счет повышения объема программы и времени поиска нужной команды в ней, когда это время не учитывается во временной сложности.

Для АПВ, работающих с оракулом, в дополнение к приведенному определению предполагается, что в некоторые моменты времени на рабочей ленте могут оказаться записи, которые понимаются как вопросы к оракулу. Ответ оракула печатается вслед за вопросом через время, специально указанное для каждого вопроса. Далее машина продолжает свои вычисления. При этом в отличие от оракулов в общепринятом смысле, предполагается, что задан список C_0 возможных вопросов к оракулу ,ответов к ним и время ответа на каждый вопрос. Предполагается также, что указан список C_1 элементарных вычислений АПВ, каждое из которых совершается за единицу времени и в совокупности позволяет промоделировать работу произвольного алгоритма.

Выбор класса АПВ вытекает из принятого нами тезиса о том, что решения многих исследуемых нами задач представляются последовательностью гипотез, приближающихся к истинному решению. При этом причины, по которым на выходной ленте печатается очередная гипотеза, могут быть самыми разнообразными. В частности, это может произойти ввиду ограниченности времени, предоставленного для вычислений, или исчерпания анализа наличных данных.

Подчеркнем, что если вычисления, производимые для некоторой входной записи u, были прерваны при гипотезе h, затем после вычислений для других входных записей потребовалось опять вернуться к записи u, то все вычисления для получения h повторяются, поскольку, если это не оговорено, АПВ считается неизменным. Ясно также, что, изменив определение АПВ, этого повтора можно избежать.

Заметим, что построение истинной гипотезы посредством АПВ отнюдь не означает появления указаний о том, что гипотеза истинна. Как и на практике в данной формализации предполагается, что истинная гипотеза может быть найдена много раньше и с меньшими затратами, чем соответствующее доказательство этого факта.

3. В дальнейшем предполагается, что рассматриваемые нами алгоритмы задаются в некотором фиксированном алгоритмическом языке *Я*, например, языке машин Тьюринга, или нормальных алгоритмов, и для каждого алгоритма указывается алфавит для записи входных и выходных слов.

Формальные аксиоматические *теории,* упоминаемые нами в дальнейшем (например, теория первого порядка), отличаются друг от друга, вообще говоря, лишь дополнительными нелогическими символами или нелогическими (собственными) аксиомами.

Понятие «синтаксическая схема», «текст», «знаковая система» мы понимаем как в [137], а именно: *синтаксическая схема* $E = \langle B; P_1, \ldots, P_n \rangle$ есть произвольное множество B с заданными на нем предикатами $P_1, \ldots, P_n$; *текстом* $T = \langle E, \varphi, A \rangle$ в заданном алфавите A назовем синтаксическую схему E с заданным отображением φ несущего множества B в алфавит A; *знаковой системой* $З = З(\Xi, R, A, F)$ назовем множество всех текстов, каждый из которых получается отображением несущего множества некоторой синтаксической схемы из множества схем R в заданный алфавит A. При этом допустимые отображения задаются множеством F, а схемы из R составлены из предикатных символов теории Ξ и удовлетворяют аксиомам Ξ.

Заметим, что разновидностями текстов могут быть не только тексты в обыденном смысле, но также таблицы измерений, изображения, чертежи, графы и др.

Пусть зафиксированы алгоритмический язык *Я* и знаковая система *З*. Произвольные алгоритм в *Я*, текст или формулу в *З* будем называть *записью* в $\langle Я, З \rangle$, а произвольное упорядоченное множество записей назовем *тезаурусом* в $\langle Я, З \rangle$.

4.1. Будем полагать, что задано взаимооднозначное отображение множества записей в множество натуральных чисел, позволяющее отождествлять записи с их числовыми кодами.

Аналогично [183] под *функцией, которую вычисляет данный* АПВ *f с оракулом*, будем понимать функцию, которая каждому значению аргумента *u* сопоставляет предел последовательности, напечатанной *f* при работе над *u*.

Функцию назовем *предельно вычислимой* в формальном смысле, если существует АПВ с оракулом, который ее предельно вычисляет.

В дальнейшем изложении, если не оговорено противное, будут рассматриваться только функции вида $\psi: U \to Y$, где U, Y — множества записей.

Через $F(C_0, C_1)$ будем обозначать множество всех АПВ с оракулом с фиксированными списками обращений к оракулу (C_0) и элементарных вычислений (C_1), вычисляющих какую-либо функцию вышеуказанного типа. В дальнейшем будут рассматриваться только АПВ с оракулом, быть может с пустым списком обращений к нему, которые будут именоваться просто АПВ.

4.2. Отношение $\rho \subseteq U \times Y$ такое, что:

1. $\forall u \in U \exists y \in Y$ такое, что $\langle u, y \rangle \in \rho$;
2. $\forall u_1 u_2 \in U$ множества $\{y \mid \langle u_1, y \rangle \in \rho\}$ и $\{y \mid \langle u_2, y \rangle \in \rho\}$ (или ρ-образы u_1 и u_2 соответственно) либо не пересекаются, либо одно из них содержится в другом, будем называть *квазифункциональным*.

Выделим все максимальные попарно не пересекающиеся ρ-образы и назовем их *ρ-классами приближений* или *ρ-приближениями*, а подмножества U с совпадающими ρ-образами назовем *ρ-классами синонимов* или *ρ-синонимами*.

Очевидны следующие свойства отношения ρ:

1) прообразы ρ-приближений определяют разбиение U;

2) произвольное ρ-приближение совпадает с ρ-образом некоторого элемента из U.

Каждый такой элемент будем называть *представителем* данного ρ-приближения. Систему представителей назовем *базисом*, если каждое ρ-приближение имеет в ней одного и только одного представителя.

В дальнейшем, если особо не оговорено, будут рассматриваться квазифункциональные отношения, для которых из непустого пересечения ρ-образов следует их совпадение.

4.3. Пусть $\psi: U \to Y$—произвольная функция и $\rho \subseteq U \times Y$—некоторое отношение.

Будем говорить, что функция ψ *моделирует отношение* ρ, если ρ—квазифункционально и $\forall u \in U \langle u, \psi(u) \rangle \in \rho$. Соответственно АПВ *моделирует* ρ, если функция, вычисляемая АПВ, моделирует ρ.

Будем говорить, что функция ψ *предназначена для моделирования* квазифункционального отношения $\rho, \rho \subseteq U \times Y$, если $\forall u \in \in U(\psi(u) \in Y)$.

Соответственно АПВ f *предназначен для моделирования* ρ, если функция, вычисляемая f, предназначена для моделирования ρ и каждая гипотеза на выходной ленте f является элементом из Y.

5. *Комбинаторные оптимизационные проблемы* определяются параметрами $\langle X, Y, \rho, C_0, C_1, F_\rho, J \rangle$, где X, Y—множества входных и выходных записей соответственно, ρ—квазифункциональное отношение и $\rho \subseteq X \times Y$, C_0, C_1—списки элементарных вычислений и обращений к оракулу, соответственно, F_ρ—множество всех АПВ с оракулом из $F(C_0. C_1)$, предназначенных для моделирования ρ, J—оператор качества алгоритмов с областью определения на F_ρ. Требуется построить оптимальный относительно J алгоритм из F_ρ.

Комбинаторность проблем — характеристика заданного представления множеств входных записей и решений для них. Она указывает на отсутствие приемлемых описаний связей между малыми изменениями входных записей и соответствующими изменениями решений в них или, вообще, отсутствие таких связей. Входные записи и решения в них фигурируют как крайне индивидуализированные объекты и требуют, как правило, специального рассмотрения в каждом отдельном случае (см. также § 1.4).

Заметим, что сами входные и/или выходные записи могут быть записями алгоритмов, в частности, комбинаторных (т. е. предназначенных для решения некоторой комбинаторной проблемы).

Для множества алгоритмов F_ρ, если особо не оговорено, предполагается возможность линейного упорядочения посредством оператора J. Вопросы, связанные с многоэкстремальностью или частичным упорядочением множества F_ρ, требуют специальных исследований [7, 73, 112] и затрагиваются нами только в § 4.

В определении АПВ отсутствует требование эффективного распознавания момента окончания решений индивидуальных задач. Следствием этого является, вообще говоря, нерекурсивность оператора качества алгоритмов, в частности, отсутствие для них представлений средствами традиционного анализа. Тем не менее, поскольку нами рассматриваются также проблемы, в которых специфика предельных вычислений несущественна, конкретизация типа оператора качества будет, как правило, проводиться.

Отметим, что в ряде проблем множество возможных решений может быть задано индивидуально для каждой входной записи, т. е. посредством специального отображения X в множество подмножеств Y.

Отметим также, что всякое ослабление требований к точности допустимых решений индивидуальных задач проблемы, вообще говоря, ведет к расширению классов ρ-образов. Это расширение может явиться также следствием априорной множественности точных решений. При этом требование квазифункциональности ρ может оказаться слишком сильным и потребуется соответствующее расширение определения комбинаторных проблем. Однако это ограничение на данном начальном этапе исследований представляется полезным.

Отдельные классы комбинаторных оптимизационных проблем получаются из общей постановки введением дополнительных ограничений. Рассмотрим некоторые из них.

6.1. Конечность проблем является характеристикой мощностей множеств входных записей и возможных решений соответствующих индивидуальных задач. Как правило, в своих исследованиях мы ограничиваемся случаем произвольно большого, но конечного множества записей. Это связано с тем, что в реальных устройствах число воспринимающих информацию элементов всегда конечно и, следовательно, среда, воспринимаемая устройством, также конечна.

Ограничение теории рассмотрением алгоритмов для обработки конечных множеств элементов облегчает переход к реализации этих алгоритмов на базе вычислительной техники. В то же время допущение о произвольно больших конечных множествах практически эквивалентно принятию абстракции о потенциальной бесконечности.

6.2. Следствием конечности проблем является существование по меньшей мере переборных разрешающих процедур для индивидуальных задач и соответствующей верхней границы на число элементарных вычислений и обращений к оракулу. Аналогичная граница может быть введена из потребностей практических вычислений. Поэтому во многих проблемах предполагается, что АПВ прекращают процесс генерации новых гипотез, связанных с решением заданной индивидуальной задачи, в момент времени, определяемый ограничениями решаемой проблемы на работу АПВ и не превышающей константы t_ρ, зависящей от ρ. Границе t_ρ можно придать смысл физического ограничения, преодолеть которое в принципе возможно, но, поскольку оно сравнимо с большой длительностью во времени, в реальной деятель-

ности используется как непреодолимое. В таком контексте переборные алгоритмы известны потенциально, но не реально.

6.3. Естественный класс проблем получается при операторах качества алгоритмов типа временная сложность.

Временной сложностью $S(\rho, u, f)$ *отношения* ρ на *аргументе* u относительно АПВ f назовем отрезок времени между печатанием u на входной ленте и первым появлением предельного числа на выходной, если это время не превышает числа t_ρ, и число t_ρ, в противном случае. Данное определение имеет сходные черты с определением временной сигнализирующей АПВ из [122].

Для конечных проблем *средней временной сложностью* или *σ-сложностью* ρ *относительно* f назовем число $\sigma(\rho, f) = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U} S(\rho, u, f)$, а *пиковой временной сложностью* или *π-сложностью* ρ *относительно* f — число $\pi(\rho, f) = \max_{u\in U} S(\rho, u, f)$.

σ-сложностью ρ и *π-сложностью* ρ относительно F_ρ назовем соответственно

$$\sigma(\rho, F) = \min_{f\in F_\rho} \sigma(\rho, f) \quad \text{и} \quad \pi(\rho, F) = \min_{f\in F_\rho} \pi(\rho, f).$$

π-сложность указывает на максимальное время, требуемое при решении индивидуальных задач. σ-сложность характеризует не только среднюю типовую сложность задач, но также может анализироваться с позиций нормированной суммарной сложности всей проблемы в целом. В § 4 будет введено понятие комплексной сложности, которое развивает идею σ-сложности при поиске приближенных решений. По существу σ-сложность есть математическое ожидание временной сложности индивидуальных задач при равновозможном появлении каждой из них. Естественно обобщить этот подход и рассмотреть случай предъявления задач при произвольной заданной частоте появления каждой из них. Однако здесь такое обобщение не производится.

6.4. Совместное введение вышеуказанных ограничений определяет класс $\boldsymbol{L_1}$, представляющий многие известные комбинаторные проблемы (см. § 1.2). В проблемах этого класса множества X, Y конечны и предполагается существование АПВ, моделирующего отношение ρ за конечное время. Требуется из множества всех тех АПВ из F_ρ, которые моделируют ρ, выделить *$\pi(\sigma)$-оптимальный,* т. е. АПВ $f_\pi(f_\sigma)$ такой, что $\pi(\rho, f_\pi) = \pi(\rho, F_\rho)$, (соответственно $\sigma(\rho, f_\sigma) = \sigma(\rho, F_\rho)$).

6.5. Инициальная запись u, которая печатается на входной ленте в начале процесса предельного вычисления, существенным образом влияет на характер его протекания. Это влияние определяется сообщением, закодированным в u, и может быть, в частности, следующих типов:

1. u сообщает только о том, что оракул задумал некоторое решение v, соответствующее этому u;

2. u содержит полную информацию о решении v, т. е. существует алгоритм вычисления v по u.

В первом случае обращение к оракулу обязательно, во втором—нет. Например, если u есть запись формулы или графа, свойства которых распознаются, позиции, в которых строится стратегия, и др.

Вышесказанное уточняется следующим образом. Будем говорить, что отношение ρ *инициально полно*, если существует АПВ, моделирующий ρ без обращений к оракулу; если для произвольных АПВ f и пар $\langle u_1, y_1\rangle$, $\langle u_2, y_2\rangle \in \rho$ начальные отрезки последовательностей состояний для входов u_1 и u_2 при отсутствии обращений к оракулу совпадают, начиная со второго состояния, а для первого состояния отличаются только входной записью, то ρ назовем *инициально пустым*.

Соответственно типу ρ проблемы и область определения ρ — множество U, также будем называть инициально полными или пустыми.

6.6. Класс *проблем адаптации* выделим введением ограничений на допустимое число элементарных вычислений и обращений к оракулу при построении АПВ очередной t-ой гипотезы, а соответствующий подкласс АПВ будем называть *алгоритмами адаптации*. Указанные ограничения характерны для реальных вычислений. Известны исследования Ю. И. Журавлева возможностей локальных алгоритмов в проблеме построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм [34]. Заметим, что условие локальности вычислений—это третье из указанных в предисловии. Первые два из них — итеративное построение решений-гипотез и нерекурсивность, либо практически непреодолимая трудность вычисления оператора качества алгоритмов, следуют из определения АПВ.

6.7. В проблемах *синтеза алгоритмов* множество выходных записей Y является множеством алгоритмов. В современных исследованиях по синтезу алгоритмов выделяются направления синтеза индуктивного, дедуктивного, трансформационного и других типов [117, 155]. Так при *индуктивном синтезе* алгоритмов в нашей интерпретации дополнительно предполагается, что множества входных записей X либо инициально пусты, либо состоят из множеств решений индивидуальных задач синтезируемых алгоритмов из Y, либо из описаний этих алгоритмов на достаточно длинном фрагменте их вычислений [10].

При *дедуктивном синтезе* входные записи содержат пары условий $\langle Q(x), R(x,y)\rangle$ (не обязательно в языке исчисления предикатов, как отмечено С. С. Лавровым), а отношение ρ таково, что для произвольных входа u и выхода f, если $\langle u, f\rangle \in \rho$, то $\forall x(Q(x) \to \to R(x, f(x))$.

Для *трансформационного синтеза* характерно задание алгоритмов множества F_ρ схемой применения правил преобразования синтезируемых алгоритмов из заданного списка таких правил.

В следующем параграфе и в § 6.4 будут определены три конкретные разновидности проблем адаптивного синтеза алгоритмов, исследование которых составляет основное содержание работы. В первой из них — ПРО, выходные записи являются алгоритмами классификации, во второй — ПАКА2, вводится ограничение $\Delta^*(t)$ на допустимое число вычислений при t-ом шаге изменения гипотез-решений, а в третьей — ПАКА1, дополнительно требуется строго последовательное усиление гипотез не менее заданного порога усиления.

§ 2. Проблемы расшифровки описаний. Адаптация алгоритмов при ограничениях типа 1

1. Как уже было сказано, в проблемах АКА (адаптации комбинаторных алгоритмов) множество выходных записей является множеством записей алгоритмов. Ниже определяются два класса проблем АКА: проблемы расшифровки описаний (ПРО), в которых множества выходных записей являются алгоритмами классификации, или описаниями, и проблемы АКА с ограничениями типа 1 (ПАКА1), связанных с конкретизацией требований к характеру изменения решений-гипотез.

2 1. Проблемы расшифровки описаний определим для совокупностей эквивалентных комбинаторных проблем класса $\boldsymbol{L}_1$. Отношение эквивалентности на $\boldsymbol{L}_1$ задается следующим образом.

Будем говорить, что квазифункциональные отношения ρ_1 и ρ_2, $\rho \subseteq X_i \times Y_i$, $i=1, 2$ *изоморфны*, если существуют операторы кодирования $\xi_1 : X_1 \to X_2$, $\xi_2 : Y_1 \to Y_2$ и декодирования $\xi_1' : X_2 \to X_1$, $\xi_2' : Y_2 \to Y_1$, такие, что ξ_1 и ξ_1' определяют взаимооднозначное соответствие между классами ρ-синонимов X_1 и X_2, и $\forall x_1 x_2 y_1 y_2 (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2;\ y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2)$ $(x_1 \rho_1 y_1 \leftrightarrow \xi_1(x_1) \rho_2 \xi_2(y_1)) \& x_2 \rho_2 y_2 \leftrightarrow \xi_1'(x_2) \rho_1 \xi_2'(y_2))$.

Пусть $\eta \subseteq \boldsymbol{L}_1 \times \boldsymbol{L}_1$ — отношение следующего вида: если $L_i \in \boldsymbol{L}_1$ и определяется отношением $\rho_i \subseteq X_i \times Y_i$, $i=1, 2$, то $\langle L_1 L_2 \rangle \in \eta$ тогда и только тогда, когда ρ_1 и ρ_2 изоморфны, операторы кодирования $\xi_1 : X_1 \to X_2$, $\xi_2 : Y_1 \to Y_2$, а также обратные им заданы в явном виде и вычисляются за конечное время, которое много меньше t_{ρ_i}.

Ясно, что отношение η есть *эквивалентность* и если $\langle L_1 L_2 \rangle \in \eta$, то π—(σ)-сложности проблем L_1 и L_2 отличаются друг от друга временем кодирования или декодирования входных записей или решений. Последнее утверждение дает возможность с точностью до кодирования-декодирования оценить $\pi(\sigma)$-сложность произвольной проблемы заданного класса эквивалентности посредством получения оценок для какого-либо из его представителей. Этот факт послужит отправной точкой в главе 3 при построении оценок сложности комбинаторных проблем. Более точно указанные оценки будут получены для стандартным образом заданных проблем расшифровки описаний, представляющих соответствующие классы эквивалентности.

Отметим, что наряду с η будет использовано отношение *слабой эквивалентности* η', которое отличается от η тем, что один из операторов кодирования или декодирования хоть и существует, но в явном виде неизвестен.

Отметим также, что рассматриваемое нами понятие эквивалентности имеет сходные черты с эквивалентностью, введенной в [105] и основанной на P-(полиномиальной) сводимости.

2.2. Пусть M—произвольное конечное множество и

$$T=\{(M_1, M_0)|M_1, \quad M_0\subseteq M \text{ и } M_1\cap M_0=\varnothing\}.$$

Элементы T или пары множеств (ПМ) пронумеруем числами $1, \ldots, \theta$, где $\theta=|T|$. Через $\varkappa$ обозначим соответствующий нумерующий оператор; через ν_1, ν_0—декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру первую и вторую компоненты ПМ с этим номером. Каждая ПМ и ее номер отождествляются.

Для произвольных $x, y\in T$ через $|x|$ обозначим мощность $\nu_1(x)\cup\nu_0(x)$; через $x\circ y$, где $\circ$—одна из операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$, ∇ (симметрическая разность), обозначим ПМ с номером $\varkappa(\nu_1(x)\circ\nu_1(y), \nu_0(x)\circ\nu_0(y))$, если эта ПМ определена. Элементы множества $D^k=\{x|x\in T \text{ и } |x|=k\}$, где $k=|M|$, назовем *абсолютными* (абс.) ПМ.

Сформулируем *проблему расшифровки описаний* (ПРО) следующим образом.

Дано: 1. конечное множество M (элементы описаний), 2. непустое множество T' абс. ПМ в M (описания возможных решений), 3. конечное множество входных записей U, 4. списки элементарных вычислений АПВ (C_1) и их обращений к оракулу (C_0), 5. оракул задумал некоторое квазифункциональное отношение $\rho\subseteq U\times T'$, моделируемое известным АПВ за конечное время. Требуется из множества F_ρ всех тех АПВ из $F(C_0, C_1)$, которые моделируют ρ, выделить АПВ f_π (или f_σ), такие, что $\pi(\rho, f_\pi)=\pi(\rho, F_\rho)$ (или $\sigma(\rho, f_\sigma)=\sigma(\rho, F_\rho)$, соответственно).

Алгоритмы решения ПРО будем называть *алгоритмами синтеза описаний*.

ПРО есть массовая проблема с параметрами $\langle M, T', U, \rho, C_0, C_1\rangle$, в которой индивидуальные задачи определяются фиксацией некоторой записи из U.

В данном определении ПРО представляют проблемы класса $\boldsymbol{L_1}$ и сами принадлежат ему. Однако основной их особенностью является не использование оператора качества — временная сложность, а возможность задания решений в форме описаний в фиксированном базисе элементарных описаний M. Оно и должно быть сохранено при переходе к общему определению ПРО. При этом, как уже отмечалось, множество M, в общем случае, комбинаторно. В частности, связи между малыми изменениями подмножеств M с соответствующими изменениями алгоритмов классификации, или описаниями, могут быть неизвестны или отсутствовать.

2.3. Возможны различные естественные модификации ПРО, например, следующие:

1. Вместо абс. ПМ рассматриваются произвольные ПМ, на которых определяется отношение ρ такое, что в класс ρ-образов вместе с каждым ПМ включаются все его согласованные расширения (см. § 2.2).

2. Выделяется некоторое подмножество T_1 из T' и дается описание одного из его свойств Q; вместо построения характеристической функции ПМ v, задуманной оракулом, требуется распознать выполненность Q для v (проблема распознавания).

В некоторых случаях, когда множество T_1 известно, проблема распознавания равносильна проблеме построения, но в общем случае они могут отличаться по сложности решения.

Наши дальнейшие рассмотрения будут относиться к первоначально поставленной проблеме построения.

2.4. Нами выдвигается тезис о том, что в каждом из классов (слабой) эквивалентности класса $\boldsymbol{L}_1$, определяемых отношением $\eta(\eta')$, можно указать представителя этого класса в форме ПРО. В определенном смысле этот тезис созвучен высказыванию Р. Эшби [141] о том, что „. . . все разумные действия являются действиями по подходящему отбору". Представляется, что ПРО позволяет формализовать эту идею для некоторых из проблем в рамках единой конструкции. В следующей главе посредством доказательства эквивалентности соответствующих ПРО ряду известных комбинаторных проблем будут получены более веские доводы в пользу выдвинутого тезиса.

В условиях отсутствия полного обоснования тезиса о представительности ПРО исследование процессов адаптации алгоритмов типа алгоритмов классификации, или описаний, следует рассматривать как определенное ограничение на класс анализируемых проблем АКА. Как будет следовать из дальнейшего изложения, основные развитые нами элементы теории сложности получены для проблем в форме ПРО. В то же время методы построения алгоритмов адаптации рассмотрены для алгоритмов другого типа, а именно, комбинаторных алгоритмов управления.

2.5. В заключение этого пункта укажем на сходные черты ПРО с проблемой декодирования. С этой целью проинтерпретируем компоненты ПРО в понятиях теории передачи информации [119].

Объектами кодирования в ПРО естественно считать ПМ из T', кодами — записи из U, а кодирующей функцией—отображение из T' в U, определяемое на основе квазифункционального отношения ρ. Существует алгоритм декодирования, который по заданному коду u восстанавливает одно из тех ПМ множества T', которым это u поставлено в соответствие. Требуется построить оптимальный в смысле π- или σ-сложности алгоритм декодирования.

Специфика ПРО с точки зрения теории передачи информации в том, что сам процесс кодирования T' в U нам неподвластен и мы

оперируем с готовыми кодами. В ПРО нет также аналога канала связи и потому не возникают проблемы пропускной способности, искажения кодовых слов и т. п. Вопрос декодирования здесь ставится при условиях, аналогичных при поиске закономерностей в природе. Тем не менее указанное сходство в постановках ПРО и декодирования сообщений позволяет ввести в систему понятий, связанных с решением ПРО, ряд полезных понятий статистической теории связи. В частности, считать, что каждую ПМ из T' оракул фиксирует с некоторой определённой вероятностью, что индуцирует соответствующую вероятность появления входных записей из U. В такой модели можно говорить об энтропии источника входных записей, о способах ее уменьшения, о принципиальных возможностях декодирования и др., рассматриваемых в теории передачи информации.

В предельном случае, когда в U можно выделить записи с вероятностью появления близкой к нулю и равновероятными остальными, анализ сложности декодирования можно провести для исходного ПРО с уменьшенной мощностью U. При более сложных распределениях вероятностей детерминированная модель ПРО может оказаться недостаточной.

Перейдем к постановке ПАКА1. Предварительно заметим, что вопрос представления ПАКА1 в форме ПРО остается открытым.

3. Как было сказано во введении, нами исследуются оптимизационные комбинаторные проблемы, такие, что алгоритмы построения решений индивидуальных задач имеют лишь локальные возможности с достаточно высокой вероятностью усиливать текущие гипотезы-решения. Уточним это ограничение следующим образом.

Введем порог $\Delta^*(t)$ на допустимое число элементарных вычислений и обращений к оракулу при t-ом шаге преобразований гипотез-решений. Пусть в проблеме АКА множество входных записей U есть множество алгоритмов (в частности, АПВ), предназначенных для решения некоторой другой комбинаторной проблемы L. Пусть также „$>$" — некоторое линейное упорядочение на множестве всех этих алгоритмов, определяемое заданным оператором качества решений исследуемой проблемы. Запись $f_1 > f_2$ будет прочитываться как „алгоритм f_1 сильнее алгоритма f_2 относительно упорядочения $>$".

Для произвольного алгоритма f из U АПВ ω назовем *усилителем* f, если $\omega(f)$ есть также алгоритм из U и $\omega(f)$ сильнее f относительно упорядочения $>$.

Кратностью применения усилителя ω *к заданному алгоритму* f назовем максимальное число последовательных гипотез-решений $\omega(f)$, $\omega(\omega(f))$, . . ., при котором справедливы неравенства: $f < \omega(f) < \ldots < \omega(\omega(\ldots\omega(f)\ldots))$. Усилители являются разновидностью операторных АПВ, для которых входные и выходные записи, а также текущие гипотезы, являются записями разрешающих процедур заданной проблемы L. При этом текущие гипотезы при каждом

изменении должны строго усиливаться, а объем проведенных вычислений при переходе к новой гипотезе должен находиться в пределах порога $\Delta^*(t)$.

Ясно, что с практической точки зрения интересны такие усилители, которые на каждом шаге применения достаточно существенно усиливают текущие гипотезы. При большой кратности применения таких усилителей, если истинное решение рассматриваемой задачи и не будет достигнуто, то тем не менее будет получено достаточно эффективное приближение к нему.

Проблема АКА типа 1 (ПАКА1) уточняется нами следующим образом: для заданных комбинаторной оптимизационной проблемы L, множества U разрешающих алгоритмов для L и порогов Δ_1, $\Delta^*(t)$, где Δ_1— обязательное приращение операторов качества при однократном применении какого-либо усилителя к произвольному f, $f \in U$, а $\Delta^*(t)$ — определено выше, построить усилитель максимальной кратности применения к каждому f из U.

Подчеркнем, это ПАКА1 порождается из исходной проблемы L в результате наложения специальных ограничений на методы поиска оптимальных решений для этой проблемы, а именно рассмотрением класса алгоритмов адаптации.

Из общей же постановки проблем АКА ПАКА1 выделяется конкретизацией класса исследуемых алгоритмов адаптации (требование строгого последовательного усиления гипотез, введение порогов Δ_1, $\Delta^*(t)$). Оператор качества алгоритмов адаптации в ПАКА1 основан на требовании максимальной кратности усиления каждого алгоритма из U. Это требование выражает прежде всего наше представление об идеальном усилении, которое при произвольных U, Δ_1, $\Delta^*(t)$ вряд ли выполнимо. Положительного ответа на вопрос о разрешимости ПАКА1 можно ожидать для конкретных его разновидностей. Так, поскольку значений максимальной кратности конечное число, то при конечном U множество всех алгоритмов адаптации можно разбить на конечное число классов в соответствии со всевозможными распределениями кратностей усиления на множестве U. Отметив для каждого $f \in U$ какой-либо усилитель максимальной кратности применения, можно построить усилитель, который на каждом f из U достигает той же максимальной кратности.

Можно исследовать ПАКА1, заменив Δ_1 на убывающую функцию от числа построенных гипотез или вообще устранив требование о строго последовательном их усилении. Именно при последнем условии в § 6.4 будет доказана разрешимость проблемы адаптации шахматных алгоритмов. Оно же, как правило, предполагается и в дальнейшем изложении. При этом, говоря о проблеме АКА, мы будем иметь ввиду ПАКА1 в указанной ослабленной форме.

Как следует из постановки ПАКА1, нас интересуют проблемы построения регулярных, многократно применимых усилителей, поз-

воляющих строить последовательности вида $f<\omega(f)<\omega(\omega(f))<\ldots$ $\ldots<\omega(\omega(\ldots(f))))$, в идеале сходящиеся к оптимальному алгоритму. В то же время возможны и другие немассовые, нестандартные, однократного применения способы усиления. В некоторых из них можно зафиксировать только сам факт происшедшего усиления, но путь, по которому он достигнут, может остаться невыясненным. В частности, к ним можно отнести выбор исходных характеристик алгоритмов, производимых экспериментатором, а также вносимые им в алгоритм изменения в ходе экспериментов.

Заметим, что усилители можно отнести к разновидности методов спуска, назначение которых в терминологии [71] есть построение релаксационных последовательностей алгоритмов (не векторов!) сходящихся к оптимальному. Тем самым возникает проблема определения и изучения пространств алгоритмов, в частности, быть может, введения мер близости, аналогов понятий непрерывности, отображений множеств алгоритмов в сравнительно исследованные пространства и др. Примером последнего подхода может служить исследование класса алгоритмов, заданных в параметрической форме, при которой предполагается принадлежность оптимальных алгоритмов классу алгоритмов, отличие которых друг от друга можно описать в виде вектора параметров фиксированных типов. Это приводит, в частности, к тому, что оператор качества алгоритмов определяется не на множестве алгоритмов непосредственно (как в рассматриваемом нами случае), а в некотором векторном пространстве параметров, что в свою очередь позволяет привлечь развитый математический аппарат.

Для исследуемых нами комбинаторных проблем предположение о том, что все разнообразие связей вход-выход можно описать с помощью векторов параметров и оптимума решений достичь настройкой этих параметров, в настоящее время не имеет каких-либо оснований. Более того, это предположение представляется на данном этапе необоснованным упрощением природы комбинаторных проблем. В общем случае, выбор конкретных форм АКА алгоритмов требует более глубокого уровня проникновения в характер связей между структурой алгоритмов и их возможностями, чем параметрический (см. § 1.4).

Заметим, что свойство алгоритма „параметрический“ указывает на его строение, а свойство „комбинаторный“ — на область применения, и, вообще говоря, эти два свойства не являются взаимоисключающими.

Термин „структурная адаптация“ [102] нами не используется, так как он всего лишь подчеркивает, что это адаптация не только параметрического типа. Более правильным представляется точное указание разновидностей адаптации, например, адаптация комбинаторных алгоритмов посредством классификации оптимальных решений, синтеза образов этих решений и др.

§ 3. К сложностной классификации комбинаторных проблем

Как будет показано в главе 2, многие известные проблемы самой различной природы могут рассматриваться как разновидности некой общей проблемы—ПРО. Более определенно принимается тезис о том, что в каждом из подклассов (слабой) эквивалентности класса комбинаторных проблем L_1 можно указать проблему в форме ПРО. Тем самым исследование проблем из L_1 сводится, с точностью до кодирования-декодирования входных и выходных данных, к исследованию ПРО при различных значениях определяющих их параметров.

Единая форма представления при всей своей относительности позволяет выделять сходство и различие комбинаторных проблем, доказывать общие утверждения об их классах, в частности, оценивать и сравнивать их сложностные характеристики и др.

Сложность разрешения является одним из основных вопросов ПРО. Поскольку параметры ПРО полностью определяют каждую ее разновидность, оценки сложности и соответствующая классификация ПРО может быть проведена посредством анализа этих параметров. В частности, представляют интерес теоремы о влиянии на сложность ПРО параметров $|M|$, $|T'|$, мощности ρ-образов, типа и природы элементов U и др. Можно ожидать, например, что сложность ПРО должна возрастать с ростом $|T'|$ и уменьшаться при возрастании мощности ρ-образов. При этом типы зависимостей сложности ПРО от соотношений параметров, вообще говоря, могут остаться неизменными. Зависимости такого рода являются качественными характеристиками сложности проблем. К ним относится, в частности, известный принцип отнесения проблем к классу проблем высокой сложности, если проблема является NP-полной [8, 53].

Ограниченность последнего критерия типа сложности в том, что он применим только к тем комбинаторным проблемам, в которых индивидуальные задачи являются задачами распознавания, т. е. двухальтернативны, и в то же время имеется возможность введения параметра — „размера“ проблемы [8]. Например, „размером“ в проблеме изоморфизма графов является число вершин в анализируемых графах.

Ясно, что имеется много проблем, существенно связанных с многоальтернативным выбором и не представимых в форме проблем распознавания. Расширение же критерия NP-полноты на такие проблемы нетривиально, так как требует введения разумного понятия сводимости друг к другу проблем с разными мощностями возможных решений.

С другой стороны, понятие „размера“ не всегда является адекватной характеристикой проблем и для многих из них практически неприменимо. Например, неясно, как ввести „размер“ для ПСГ^{ш}— проблемы поиска стратегий в графе шахматной игры. Если считать „размером“ число фигур в позиции, то не только этот „размер“ оказывается ограниченным, но и далеко не очевидно, что сложность поиска стратегий определяется этим числом.

Не отрицая адекватности критерия NP-полноты для многих комбинаторных проблем, нами введен также другой тип высокой сложности проблем, связанный с их представлением в форме ПРО, а именно, следующие $\pi(\sigma)$-*критерии*: ПРО с параметрами $\langle M, T', U, \rho, C_0, C_1 \rangle$ $\pi(\sigma)$-*переборная*, если $\pi(\sigma)$-сложность этой ПРО не меньше $|M|$. Тем самым перебор понимается как необходимость обязательных вычислений, число которых больше мощности множества всех возможных элементов описаний решений $|M|$. Представляется, что данное уточнение перебора соответствует естественному смыслу этого термина. При этом выбор π- или σ-критериев определяется конкретной природой проблемы, в частности, тем, как часто должны решаться те или иные индивидуальные задачи данной проблемы.

Введенный тип перебора определяется сравнением $\pi(\sigma)$-сложности с $|M|$. В то же время, рассматривая другие границы, например $|T'| \cdot |M|$ или $|M|^n$, можно ввести более тонкую градацию типов перебора.

Напомним, что каждая исследуемая проблема может иметь, вообще говоря, несколько представлений в форме ПРО и, соответственно, иметь различные характеристики сложности решения. К сожалению, в настоящее время мы не располагаем формальным аппаратом порождения всех эквивалентных представлений данной проблемы в форме ПРО, их сравнения и выбора представления с минимальной сложностью. Тем не менее, согласно определению эквивалентности комбинаторных проблем, сложности всех этих ПРО будут отличаться друг от друга сложностью кодирования-декодирования входных данных. Естественно, что при неудачном представлении входных-выходных данных сложность ПРО может существенно отличаться от минимальной сложности проблем заданного класса эквивалентности. Можно сказать, что ПРО, оставаясь в рамках комбинаторных проблем данного класса, в определенном смысле обладают разной степенью избыточной комбинаторности, обусловленной конкретным представлением входных-выходных данных. При этом для проблем минимальной сложности комбинаторность будет обусловлена уже природой проблемы и неустранима.

Задачу приближения к проблемам минимальной сложности в рамках класса эквивалентности посредством изменения описаний входных-выходных данных можно отнести к типу задач, связанных с поиском „хорошего“ представления заданной проблемы.

Наше исследование сложности комбинаторных проблем проводилось для эквивалентных им ПРО в предположении, что близость представлений этих ПРО к оптимальным удовлетворительна. Соответственно утверждения о $\pi(\sigma)$-переборности некоторой комбинаторной проблемы справедливы с учетом относительного характера представления этой проблемы через ПРО.

Необходимо подчеркнуть, что $\pi(\sigma)$-переборная сложность некоторой ПРО характеризует всего лишь тип оптимальных для этой

ПРО алгоритмов, указывая на неустранимость определенного объема вычислений. В то же время вопрос о том, может ли $\pi(\sigma)$-переборная проблема быть реально разрешена, определяется величиной этого объема вычислений, что в свою очередь, зависит от конкретных значений параметров ПРО. ПРО может быть $\pi(\sigma)$-переборной или нет и независимо от этого быть разрешимой или нет в допустимое в реальных условиях время. Для классификации таких проблем введем понятия (актуальной) σ-неразрешимости.

При определении временной сложности была введена константа t_ρ, указывающая на максимальное допустимое время решения индивидуальных задач заданной проблемы. Если $\pi(\sigma)$-сложность проблемы не превышает некоторую другую константу t'_ρ, $t'_\rho \leqslant t_\rho$, будем говорить о ее $\pi(\sigma)$-*разрешимости*. В противном случае проблема будет считаться $\pi(\sigma)$-*неразрешимой*.

Если $\pi(\sigma)$-сложность проблемы оценивалась относительно не всего класса алгоритмов, а только относительно некоторой доступной в настоящее время ее части, то в случае превышения $\pi(\sigma)$-сложности соответствующих констант будем говорить об *актуальной* $\pi(\sigma)$-*неразрешимости*.

Для (актуально) $\pi(\sigma)$-неразрешимых проблем возникает вопрос выбора адекватного оператора качества алгоритмов, и, быть может перехода к новой постановке. Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

Отметим, что критерии типов сложности проблем—(актуальная) $\pi(\sigma)$-разрешимость, применимы к произвольной проблеме из $\boldsymbol{L}$; трудность—в вычислении $\pi(\sigma)$-сложности этих проблем. Как будет показано в главе 3, имеется тесная связь между длинами минимальных тестов таблиц, порождаемых комбинаторными проблемами в форме ПРО, и нижними оценками π-сложности таких проблем. Поскольку техника вычисления длин тестов достаточно развита, вычисление оценок сложности ПРО через длины тестов представляется осуществимой задачей. Тем самым возникает возможность сложностной классификации ПРО на основе оценок длин минимальных тестов, что в свою очередь порождает вопрос о степени соответствия такой классификации с истинной.

§ 4. Приближенное решение комбинаторных проблем

1.1. Класс $\boldsymbol{L}_1$ комбинаторных проблем был выделен посредством конкретизации оператора качества алгоритмов в форме временной сложности. В данном параграфе будет описан другой оператор, который наряду со средней временной сложностью алгоритмов указывает также на среднее отклонение оптимальных решений от полученных. Такой оператор целесообразно использовать не только для $\pi(\sigma)$-неразрешимых проблем, но также и в тех случаях, когда по тем или иным соображениям приходится ограничивать среднее время решения индивидуальных задач.

Прежде чем приступить к непосредственному описанию оператора качества приближенных алгоритмов проведем краткое обоснование необходимости приближенного подхода к решению ряда комбинаторных проблем.

1.2. Многие комбинаторные проблемы характерны для исследований в естественных науках—в физике, астрономии и др., в которых высокая неопределенность при поиске решений вытекает из чрезвычайного многообразия мира, существующего независимо от воли человека, и априори ему неизвестного. К ним относятся проблемы формирования образов, закономерностей и др.

В ряде других проблем поиск решений производится в множестве объектов, порожденных деятельностью человека и потому потенциально ему известных. Типичной особенностью такого рода множеств до определенного этапа развития проблем была возможность выбора правильного решения в разумное время по меньшей мере перебором. Однако на современном этапе развития имеются проблемы, например, типа ПСГ[ш] (поиска шахматных стратегий), в которых несмотря на то, что пространство поиска решений порождаемо алгоритмически и в этом смысле известно, тем не менее выбор оптимальных решений в нем в реальное время не представляется возможным (быть может, только на данном этапе исследования рассматриваемой проблемы).

Можно сказать, что полученные искусственным путем пространства поиска решений в настоящее время по своей сложности приблизились к естественным. В этом же смысле следует, видимо, понимать высказывание о том, что „невозможность переработки некоторой информации равносильна отсутствию его некоторой части", сформулированное Н. А. Криницким при перечислении основных результатов исследования М. М. Ботвинника в [14].

1.3. Для сложных проблем, связанных с естественными пространствами поиска, общепринят принцип неустранимости гипотетического характера решений, который даже введен в теорию познания в форме закона об относительности истины. Этот же принцип используется при решении поисковых проблем в пространствах некомбинаторного типа, обладающих аналитическими свойствами. Для таких проблем в настоящее время имеется развитый аппарат приближенных вычислений, в частности, решения дифференциальных уравнений, численного интегрирования, решения алгебраических уравнений и др. При поиске решений сложных комбинаторных проблем на практике также издавна вынужденно прибегают к неоптимальным решениям, но, быть может, с чувством неудовлетворенности и с надеждой достичь таких решений в будущем. Принятие принципа о невозможности точных решений для комбинаторных проблем, так же как и в аналитическом случае, позволит сосредоточить усилия исследователей на построении аппарата приближенных решений и оценки качества работы соответствующих процедур. По своему значению для разви-

тия теории решения сложных комбинаторных проблем значение такого рода ограничения можно сравнить с принятием закона о невозможности вечного двигателя в физике.

О преимуществах сознательного отказа от точных решений (для одной из комбинаторных проблем—шахматной игры) посредством замены глобальных (точных) целей задачи локальными (неточными) весьма определенно сказано М.М.Ботвинником [14]: „Может показаться, что цель игры определяется элементарно; это было бы заблуждением. Точная цель игры (например, мат) может оказаться ошибочной, дезорганизующей работу системы. Наоборот, паллиативная (неточная) цель может быть правильной, оптимальной для данной системы. В чем же здесь дело? Все зависит от возможностей системы управления. Если поставленная цель такова, что получить соответствующую информацию нельзя, или устройство по переработке информации не в силах переработать всю необходимую информацию, или программа по переработке информации не соответствует поставленной цели, или, наконец, исполнительный орган не приспособлен для исполнения необходимого решения, система управления оказывается неработоспособной и ничто не сделает ее работоспособной.

Наоборот, если цель игры отличается от точной, но удовлетворительна и это паллиативная цель гармонирует с системой управления, то система оказывается работоспособной, а результаты ее работы эффективными".

Данный подход характерен изначальным переходом к неточной модели, но с приобретением возможности по меньшей мере анализа степени этой неточности. Во многих других работах приближенность и неполнота обработки данных сохраняются, однако выступают как следствие причин, не поддающихся исследованию.

1.4. Построение моделей с регулируемой степенью адекватности реальным проблемам, и в то же время достаточно простых при исследованиях, является нетривиальной задачей. „В некотором смысле построение математических моделей является простым", —отмечает Р. Беллман в [11]. „Реалистические модели, —продолжает он, имеют, однако, неприятную особенность быстро исчерпывать память и скоростные возможности современных вычислительных машин. Можно достичь прогресса либо при искусном упрощении математической модели, позволяющем получить содержательные численные исследования, либо когда аналитические достижения позволяют изучить класс процессов, которые ранее считались слишком сложными".

Модель должна быть такой, чтобы можно было бы для каждого заданного ресурса вычислений обеспечить максимально достижимый уровень точности решений. Она должна указывать на первостепенные для повышения правдоподобия гипотез операции и второстепенные. Блестящим примером таких моделей могут служить ряды Фурье, используемые при аппроксимации функций. В шахматах попытки построения таких моделей связывают с введением предпочте-

ния одних операций перед другими. Например, форсированных вариантов перед обычными, первых ходов или целей в соответствующих упорядочениях, поиска в тезаурусе знаний в определенном порядке и др.

Каждой модели заданной проблемы соответствует определенный класс разрешающих процедур разной степени оптимальности относительно этой модели. Кроме того, каждый из таких алгоритмов характеризуется собственной степенью оптимальности относительно заданной проблемы, что в совокупности создает большие трудности при сравнении алгоритмов. Поэтому необходим единый при разных моделях исходной проблемы критерий оценки качества алгоритмов. Ниже описан один из таких критериев.

2.1. Пусть t_ρ — определенная в § 1 верхняя граница времени, допустимого при решении индивидуальных задач заданной проблемы произвольным АПВ. Ясно, что для АПВ с таким ограничением число гипотез, порожденных в процессе поиска решений отдельных задач, конечно.

Мы полагаем, что для исследуемых нами проблем определен алгоритм A вычисления сходства гипотез искомому решению, который каждой гипотезе h ставит в соответствие число $A(\rho, h, u)$ — *сходство гипотезы h с ρ-образом заданной входной записи u.* Предполагается, что $A(\rho, h, u)$ есть некоторое рациональное число из отрезка $[0, 1]$ и чем больше оно, тем достовернее гипотеза h.

Разность $1-A(\rho, h, u)=a(\rho, h, u)$ будем называть *отклонением* гипотезы h.

Предполагается также, что $\forall uh(u\in U \& h\in\rho(u)\to A(\rho, h, u)=1)$, т. е. элементы ρ-образа для u имеют сходство, равное 1. Например, в ПРО $a(\rho, h, u)$ может быть определен как $\frac{1}{2k}(\min\limits_{v\in\rho(u)} h \nabla v)$, где $k=|M|$ и $\rho(u)$-образ u. Для проблем дискретного программирования [49] отклонение может быть определено на основе функционала качества решений.

При анализе гипотез, генерируемых некоторым конкретным АПВ f, $h=f(u)$, и потому вместо $A(\rho, h, u)$ или $a(\rho, h, u)$ при АПВ f будет использоваться запись $A(\rho, f, u)$ или $a(\rho, f, u)$ соответственно. Подчеркнем, что задание алгоритма A описывает всего лишь принцип, по которому, исходя из природы проблемы, можно установить степень близости его возможных решений с гипотезами. Сами же значения этой близости нам априори неизвестны и по определению для этого требуется знание ρ-образов заданных входных записей. При заданной гипотезе можно, вообще говоря, только оценить величину ее сходства искомому решению или вычислить *правдоподобие* гипотезы. При этом работа алгоритмов вычисления правдоподобия гипотез может быть основана, в частности, на анализе следующих факторов:

1) степени согласованности гипотезы с исходными эмпирическими данными;

2) согласованности данной гипотезы с ранее предложенными;
3) количества взаимных связей с другими гипотезами и новых следствий;
4) устойчивости гипотезы во времени при заданной интенсивности их проверки;
5) влияния на σ-сложность решаемой задачи;
6) типа гипотезы (для различения, воспроизведения предсказания и др.);
7) построена ли гипотеза алгоритмом с высокими показателями на контрольных задачах и др.

Построение алгоритмов вычисления правдоподобия гипотез и анализ их соответствия с алгоритмами сходства является важной проблемой, требующей специальных исследований.

2.2. Введем критерий моделирования отношений с учетом сходства гипотез с искомыми решениями.

Пусть $\rho \subseteq U \times Y$—некоторое квазифункциональное отношение, U, Y—конечны, $f \in F_\rho$, где F_ρ—множество всех t_ρ-ограниченных АПВ, предназначенных для моделирования ρ.

Комплексной сложностью отношения ρ *на аргументе и относительно* АПВ f, или $\langle \rho, f, u \rangle$ КС, назовем вектор $\langle a(\rho, f, u), b(\rho, f, u) \rangle$, где $a(\rho, f, u)$—отклонение гипотезы $h = f(u)$, построенной АПВ f в момент останова при входной записи u, а $b(\rho, f, u) = \dfrac{S(\rho, f, u)}{t_\rho}$, где $S(\rho, f, u)$ — время, затраченное на построение h.

Средней комплексной сложностью ρ *относительно* f, или $\langle \rho, f \rangle$ СКС, назовем вектор $\langle a(\rho, f), b(\rho, f) \rangle$, где $a(\rho, f) = \dfrac{1}{|U|} \sum\limits_{u \in U} a(\rho, f, u)$ и $b(\rho, f) = \dfrac{1}{|U|} \sum\limits_{u \in U} \dfrac{S(\rho, f, u)}{t_\rho}$.

3.1. Для постановки приближенных комбинаторных проблем необходимо ввести понятие оптимального АПВ, предназначенного для моделирования заданного отношения. С этой целью на множестве АПВ введем следующее упорядочение B^0_ρ:

$$\forall f_1 f_2 \in F_\rho (f_1 B^0_\rho f_2 \leftrightarrow a(\rho, f_1) \leqslant a(\rho, f_2) \& b(\rho, f_1) \leqslant b(\rho, f_2)),$$

где $a(\rho, f_i)$ и $b(\rho, f_i)$—компоненты $\langle \rho, f_i \rangle$ СКС, $i = 1, 2$. $f_1 B^0_\rho f_2$ читается как „f_1 сильнее f_2 относительно B^0_ρ“, когда справа хотя бы одно из неравенств является строгим и читается как „f_1 равносильно f_2 относительно B^0_ρ“, в противном случае.

Укажем на некоторые свойства B^0_ρ.

Пусть F—множество минимальных относительно B^0_ρ АПВ. Легко показать, что множество F—непусто. Действительно, убедимся вначале в том, что множество $Z = \{\langle \rho, f \rangle$ СКС $| f \in F_\rho\}$ конечно. Это утверждение равносильно утверждению о конечности множества значений $a(h, \rho)$ и $b(\rho, f)$ относительно всех АПВ из F_ρ. Произвольный АПВ из F_ρ, предназначенный для моделирования ρ, является оператором, определяемым подмножеством $U \times Y$. Поскольку $U \times Y$

конечно, то и множество всех возможных значений $a(\rho, h, u)$ также конечно, где $u \in U$, $h \in Y$. Следовательно, конечно множество его подмножеств, что и доказывает конечность множества значений $a(h, \rho)$.

Конечность множества значений $b(\rho, f)$ следует из t_ρ-ограниченности АПВ из F_ρ и дискретности значений $S(\rho, f, u)$.

Множество $\{f \mid f \in F_\rho \& <\rho, f> \text{СКС} = z\}$ назовем z-классом АПВ. Из конечности Z следует, что множество z-классов конечно. Среди них найдется и непустое, поскольку F_ρ непусто. Индуцируем упорядочение B_ρ^0 на множество всех непустых z-классов. Поскольку число их конечно, то среди них существуют минимальные относительно B_ρ^0. Объединение этих z-классов и образует непустое F.

Очевидно также, что $\forall f_1 f_2 \in F(\arg(\rho, f_1) = \arg(\rho, f_2) \leftrightarrow <\rho, f_1> \text{СКС} = <\rho, f_2> \text{СКС})$, где $\arg(\rho, f_i)$ — аргумент вектора $<\rho, f_i> \text{СКС}$, $i = 1, 2$;

$$\forall f_1 f_2 \in F(a(\rho, f_1) < a(\rho, f_2) \leftrightarrow b(\rho, f_1) > b(\rho, f_2)),$$

так как в противном случае f_1 и f_2 были бы сравнимы относительно B_ρ^0 и это противоречило бы определению F. Из последнего свойства следует, что для произвольного отношения ρ чем больше среднее сходство, достигаемое некоторым АПВ множества F, тем больше требуемое для этой цели среднее время.

Данное свойство предложенной сложностной меры хорошо согласуется с нашим интуитивным представлением о связи между уровнем сходства решений и необходимыми для достижения этого уровня средствами.

Ломаные, соединяющие элементы множества $Z_F = \{<\rho, f> \text{СКС}$ $f \in F\}$, назовем *кривыми минимальных* АПВ.

Конкретизация форм этих кривых требует отдельного исследования. В частности, целесообразно проверить следующую гипотезу о прямолинейности: $<\rho, f>$ СКС для множества F-минимальных относительно B_ρ^0 АПВ расположены на прямой $y = -x(1-a') + 1$, при $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $a' = \min\limits_{f \in F_\rho} a(\rho, f)$.

При этом предполагается, что $\min\limits_{f \in F_\rho} b(\rho, f) = 0$, так как его значение определяется физическими возможностями машин выдавать произвольный ответ на заданное входное слово, а $a' \underset{f \in F_\rho}{>} 0$, так как в рассматриваемом классе F_ρ ни при каком допустимом времени точное моделирование невозможно.

3.2. Наше представление об оптимальном АПВ, моделирующем заданное отношение ρ, связывается с минимальными относительно B_ρ^0 АПВ. Для линейного упорядочения этих АПВ необходим соответствующий дополняющий B_ρ^0 критерий сравнения. Казалось бы, что произвольные СКС можно сравнивать на основе их векторной разности. Однако наши попытки такого упорядочения не привели к успеху в основном потому, что противоречили определению B_ρ^0.

Например, для отношения, определяемого условиями: $\forall f_1 f_2 f_a$

(f_1, f_2—произвольные, а f_α—α-оптимальный АПУ), если $A(\langle\rho, f_\alpha\rangle$ СКС—$\langle\rho, f_1\rangle$ СКС)$=r_1$ и $A(\langle\rho, f_\alpha\rangle$ СКС—$\langle\rho, f_2\rangle$СКС)$=r_2$, где $A(x)$—модуль вектора x, то: 1) $r_1<r_2\to f_1$ сильнее f_2; 2) $r_1=r_2\to$ $\to(f_1 B^0_\rho f_2\to f_1$ сильнее f_2); 3) $r_1=r_2\to(\neg(f_1 B^0_\rho f_2 \vee f_2 B^0_\rho f_1)\to f_1$ и f_2 несравнимы), можно доказать, что B^0_ρ является частичным порядком, однако допускает существование АПВ f_1 и f_2 таких, что $r_1<r_2$, но в то же время f_2 сильнее f_1 относительно B^0_ρ. Безуспешной оказалась также наша попытка определения оптимального относительно СКС АПВ на основе аксиом Нэша [73] при интерпретации проблемы как игровой, а именно, как проблемы выбора оптимального дележа для подходящей арбитражной схемы (см. п. 5 в конце § 4).

Вышеизложенные трудности линейного упорядочения АПВ на основе СКС при произвольных значениях компонент $a(\rho, f)$ и $b(\rho, f)$ вынуждают нас рассматривать упорядочения АПВ по среднему отклонению при фиксированном среднем времени α. Предполагается, что конструкции всех АПВ допускают изменения, при которых достигается заданное среднее время вычислений. При этом характер влияния этих изменений на среднее отклонение может быть самым различным, в частности, линейным. При каждом из них все АПВ будут иметь СКС с одинаковой абсциссой и их можно линейно упорядочить относительно значений среднего отклонения. Это упорядочение будем обозначать через B^α_ρ. Ясно, что оно не противоречит B^0_ρ.

При заданных отношении ρ, среднем нормированном времени вычислений α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, *$\alpha$-оптимальным АПВ в классе* F_ρ назовем произвольный АПВ $f^*\in F_\rho$ такой, что $a(\rho, f^*)=\min\limits_{f\in F_\rho} a(\rho, f)$.

Ясно, что α-оптимальный АПВ при $0\leqslant\alpha\leqslant1$ существует. Принятое нами упорядочение АПВ содержательно означает, что заданные АПВ сводятся к некоторым, вообще говоря, другим АПВ класса F_ρ с одним и тем же средним временем вычислений (совпадающим с временем заданного α-оптимального АПВ), а затем приведенные АПВ сравниваются по значениям среднего отклонения гипотез.

3.3. Класс проблем $\boldsymbol{L}_2$ порождается классом $\boldsymbol{L}_1$ при различных ограничениях на среднее допустимое время решения индивидуальных задач. *α-приближенной проблемой относительно* L_0, $L_0\in\boldsymbol{L}_1$ назовем проблему, в которой дополнительно к L_0 заданы алгоритм $A(\rho, h, u)$ вычисления сходства гипотезы h относительно ρ-образа $\rho(u)$ и среднее нормированное время α для оптимального в классе F_ρ АПВ; требуется из множества F_ρ выделить α-оптимальный.

Множество всех проблем, полученных при каждом $L_0\in\boldsymbol{L}_1$ и $0\leqslant\alpha\leqslant1$, образуют класс $\boldsymbol{L}_2$. Для проблем этого класса оператор качества имеет вид $a(\rho, f)=\dfrac{1}{|U|}\sum\limits_{u\in U} a(\rho, f, u)$. Оптимум понимается как $\min\limits_{f\in F_\rho} a(\rho, f)$ при условии, что $b(\rho, f)=\alpha$. Для этого оператора выполняется условие 3 регулярности оптимизационных проблем, ука

занное в [49] (см. также § 1, 4) а именно, его локальный экстремум совпадает с глобальным. Он отличен от операторов качества приближенных решений, описанных в [111], в том, что оценивание производится по среднему отклонению решений от оптимальных при фиксированном среднем времени, в то время как в [111] делается наоборот.

4. Имеется прямая аналогия представления α-приближенных проблем посредством отношения ρ и алгоритма сходства A с представлением размытых отношений по Л. Заде. Действительно, по [103], размытое множество C в пространстве X определяется множеством упорядоченных пар $\{(x, \psi(x))\}$, где $\psi(x)$—функция вхождения x в C и $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$. Размытым же отношением в пространстве X называется размытое подмножество C пространства $X \times X$.

Связь α-приближенных проблем с размытыми отношениями состоит в том, что подмножество $\rho' = \bigcup\limits_{u \in U} Y \times \rho(u)$ декартового произведения $Y \times Y$ с функцией вхождения $A(\rho, h, u)$, $h \in Y$ является размытым отношением. Следовательно, заданную α-приближенную проблему L можно задать используя размытое отношение ρ', определяемое через ρ и A. α-приближенную проблему в вышеуказанном представлении будем называть также *размытой*.

Ясно, что идеальные проблемы могут рассматриваться как частные случаи размытых при $\alpha = 1$. Представляет интерес исследование влияния „степени размытости" отношения ρ' на СКС проблем. Трудность состоит в выявлении связи между реальными ограничениями на множество гипотез с содержательно приемлемой мерой сходства и СКС соответствующей приближенной проблемы.

Отметим также, что множества $B_u = \{h | h \in Y \& A(h, \rho, u) > 0\}$ при $Y = \bigcup\limits_{U \in u} B_u$ могут рассматриваться как классы толерантности [137]. При этом естественно полагать, что чем больше число классов толерантности, включающих некоторое $h \in Y$, тем меньше величина $A(h, \rho, u)$ при соответствующих u. Интересно рассмотреть влияние различных типов $A(h, \rho, u)$, конкретизирующих связь расширения $\rho(u)$ с величиной сходства подключаемых к $\rho(u)$ элементов Y, на величину СКС. Исследования в этом направлении представляются перспективными при сравнительной оценке классификаций, в частности, определяемых отношениями эквивалентности, толерантности или размытыми.

5.1. Проблема выбора оптимального дележа при подходящей арбитражной схеме в [23] определяется следующим образом.

Пусть $J = \{1, \ldots, n\}$-конечное множество, элементы которого называются *игроками*, R^J—n-мерное евклидово пространство, оси координат которого поставлены в однозначное соответствие игрокам из J. Берется произвольное множество $S \subset R^J$, элементы которого называются *дележами*. Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$, то компоненту x_i называют долей игрока i в дележе x. Дележ $x \in S$ можно интерпретировать как возможное соглашение („сделку") между игроками из J, в результате которого каждый игрок $i \in J$ получает долю x_i. Вводится также дополнительный вектор $x^0 \in R^J$, имеющий смысл дележа, но

быть может не принадлежащий S и понимаемый как выигрыш игроков, когда они не придут к согласию.

Тройка $\langle J, S, x^0 \rangle$ называется *арбитражной схемой.* Для каждой конкретной схемы рассматривается проблема выбора того дележа или дележей, которые должны в наибольшей степени удовлетворять игроков. Не имея явных критериев для такого выбора, Дж. Нэшем [73] была сформулирована система аксиом, которым должен удовлетворять принцип оптимальности, ставящий каждому непустому выпуклому замкнутому ограниченному множеству дележей S при $J=\{1,2\}$ один вполне определенный „оптимальный" дележ. Было доказано, что данная система аксиом является полной в том смысле, что существует единственный принцип оптимальности для произвольной арбитражной схемы, удовлетворяющей этим аксиомам.

В [23] рассмотрена возможность расширения указанного утверждения при произвольном конечном J, не обязательных выпуклом S и положительной доле выигрыша каждого игрока. Оказалось, что и в этом случае можно указать полную систему аксиом и доказать аналогичную теорему. Для интересующего нас случая двух игроков и только положительных дележей она формулируется следующим образом.

Пусть φ есть соответствие между произвольной арбитражной схемой $\langle J, S, x^0 \rangle$ и множеством ее оптимальных дележей $\varphi(J, S, x^0)$ при $|J|=2$ и $S \subset R_+^J$.

Тогда, если для φ справедливы нижеследующие аксиомы 1—7, а именно:

1. $\varphi(J, S, x^0) \subset x^0 + R_+^J$ (индивидуальная рациональность);

2. $\varphi(J, SM+z, x^0M+z) = \varphi(J, S, x^0)M+z$ (линейность), где M — $n \times n$-матрица с неотрицательными диагональными элементами, а z — n-вектор;

3. $\varphi(J, S, x^0) \subset S$ (реализуемость);

4. пусть $\pi: J \to J$ — взаимно-однозначное соответствие J на себя; тогда, если $\pi S = S$, $\pi J = J$, то $\pi\varphi(J, S, x^0) = \varphi(\pi J, \pi S, \pi x^0) = \varphi(J, S, x^0)$ (симметрия);

5. пусть $S \cup T \subset R_+^J$, $S \cap T = \varnothing$ и по каждому дележу $x \in S$ найдется такой дележ $y \in T$ и такое (зависящее от x и y) $\alpha > 1$, что $\alpha x \leqslant y$, тогда $\varphi(J, T, x^0) = \varphi(J, S \cap T, x^0)$ (оптимальность по Парето);

6. если $S \subset T$, то $\varphi(J, S, x^0) = \varphi(J, T, x^0)$ (независимость от посторонних альтернатив);

7. если S — компактно и $S \cap R_+^J \neq \varnothing$, то $\varphi(J, S, x^0) \neq \varnothing$ и в [23] доказано, что $\varphi(J, S, x^0)$ (при $|J|=2$) есть множество дележей из S, в котором функция $P(x) = x_1 \cdot x_2$ достигает на S своего максимума.

5.2 Для исследуемой нами проблемы выбора оптимального относительно СКС АПВ в качестве I и II „игроков" можно рассматривать два противоположных начала, присущие каждому из АПВ и ответственные за изменение компонент сходства $x_1 = 1 - a(\rho, f)$ и быстродействия $x_2 = 1 - b(\rho, f)$ в СКС. Условно этих „игроков" можно

назвать „сходством“ и „быстродействием“, а компоненты x_1 и x_2 рассматривать как доли этих „игроков“ при дележе (x_1, x_2). Каждый такой дележ соответствует определенной интенсивности „игроков“ „сходство“ и „быстродействие“ и определенному классу АПВ с такой СКС. В качестве x^0-дележа при отсутствии соглашения естественно принять $x^0=(0, 0)$.

Поскольку множество $Z=\{<\rho, f>\text{СКС} \mid f \in F_\rho\}$ конечно, то, определив понятие оптимального дележа так, чтобы он всегда принадлежал Z (аксиома 7), можно гарантировать существование оптимального АПВ. Само же представление об оптимальном дележе естественно уточнить в соответствии с тем, выполнены или нет для нашей проблемы аксиомы 1—7. Анализ этих аксиом с содержательных позиций указывает на то, что все они, за исключением аксиомы 4, отвечают природе нашей проблемы и потому приемлемы. Аксиома 4 требует инвариантности оптимума при перестановках игроков, их анонимности, что несовместимо с существенно различной природой сходства и быстродействия. Поэтому прямое использование вывода теоремы Н. Н. Воробьева о принципе оптимального дележа в нашем случае неправомерно, а вопрос об аналогичном утверждении при ослаблении аксиомы 4 остается открытым.

Глава 2

ПРОБЛЕМЫ РАСШИФРОВКИ ОПИСАНИЙ

§ 1. Представительность проблем расшифровки описаний

1. Рассмотрим возможность представления в рамках ПРО ряда конечных комбинаторных оптимизационных проблем, в частности, известных проблем расшифровки автоматов, формирования понятий и др., определяемых ниже проблем поиска стратегий в графе и оптимального комбинаторного управления, а также проблем распознавания тавтологий от n-переменных, получаемой из известной проблемы ТАВТ [105] при конечном числе допустимой переменных, и поиска вывода в исчислении высказываний при том же ограничении на число переменных.

Возможность представления некоторой проблемы через ПРО уточняется нами через понятие слабой эквивалентности проблем, введенное в параграфе 2.1.

Укажем на ряд комбинаторных проблем (слабо) эквивалентных инициально полным ПРО.

2.1. Проблема *поиска оптимальных стратегий управления* описывается следующим образом.

Задается множество объектов, которые принято называть *состояниями* или *ситуациями*. Имеются также два других множества, элементы которых называются *управлениями* и *возмущениями*. Если действуют управление и одно из сопряженных с ним возмущений, то некоторые ситуации переходят в другие ситуации. Возможные пути этих изменений определяются заранее. Элементы из множества всех ситуаций, выделенные как целевые, называются *выигрышными*.

Решение проблемы состоит в построении выигрышной стратегии т, е. метода, который по произвольной заданной ситуации позволяет найти последовательность управлений, ведущих к выигрышным ситуациям, независимо от действующих возмущений. При этом дополнительно требуется, чтобы выигрышная стратегия была найдена за минимальное время.

Для точной постановки проблемы поиска оптимальных стратегий мы используем понятие **М**-ситуации, приведенное в [12]. **М**-ситуация

определяется шестеркой $\Gamma=\langle S, C, D, \mathbf{M}, S_W, S_L\rangle$, где S, C, D— произвольные множества соответственно *ситуаций*, *управлений* и *возмущений*, S_W и S_L-непересекающиеся подмножества S, элементы которых называются *выигрышными* и *проигрышными* ситуациями соответственно, а $\mathbf{M}$-частичное отображение $S\times C\times D$ в S.

Выражение $(s, c, d, s')\in\mathbf{M}$ означает, что s' есть результат применения управления c и возмущения d к s.

Множество ситуаций S_c и S_d, для которых допустимы управление c, соответственно возмущение d, определяются следующим образом:

$$S_c=\{s|\exists d\in D\exists s'\in S \text{ и } (s, c, d, s')\in\mathbf{M}\},$$

$$S_d=\{s|\exists c\in C\exists s'\in S \text{ и } (s, c, d, s')\in\mathbf{M}\}.$$

Ясно, что из $(s, c, d, s')\in\mathbf{M}$ следует, что $s\in S_c\cap S_d$. Справедливо и обратное, т. е. из $s\in S_c\cap S_d$ следует, что существует $s'\in S$, при котором $(s, c, d, s')\in\mathbf{M}$.

Ситуации, для которых не существует допустимых управлений, приводящих к выигрышным или проигрышным ситуациям, назовем *ничейными* и обозначим через S_D.

Элементы множеств S_W, S_L, S_D будем называть *конечными* или *целевыми* ситуациями.

Введем обозначения $G=S_W\cup S_L\cup S_D$, $S^*=S\setminus G$ и в дальнейшем $\mathbf{M}$-ситуации будем задавать списком $\langle S, C, D, \mathbf{M}, G\rangle$.

Произвольное отображение f из S^* в C назовем *алгоритмом поиска управлений* (АПУ), если при произвольных $s\in S^*$ и $c\in C$ из $f(s)=c$ следует, что $s\in S_c$.

Алгоритмы поиска возмущений определяются аналогично.

Мы полагаем, что управления и возмущения вырабатываются соответствующими алгоритмами в дискретные моменты времени, а порядок их воздействия на ситуации заранее определен. Для наших дальнейших целей уточнение проблемы поиска оптимальных стратегий удобно провести для одной из разновидностей $\mathbf{M}$-ситуаций, определяемой шахматной игрой, после чего обобщение этой проблемы на произвольные конечные $\mathbf{M}$-ситуации становится очевидным.

2.2. Сформулируем проблему поиска стратегий в графе шахматной игры. При описании графов мы будем следовать терминологии [125] и в большинстве случаев без повторных определений.

Игре $\Gamma=\langle S, C, \mathbf{M}, D, G\rangle$ с полной информацией и противоположными интересами, где S, C, D, G—соответственно конечные множества ситуаций (позиций), управлений (ходов белых), возмущений (ходов черных) и целевых ситуаций, $\mathbf{M}$—частичное отображение $S\times C\times D$ в S (правила игры) [12], поставим в соответствие *граф игры* Γ. Это ориентированный конечный граф с множеством вершин $V(\Gamma)=S$, которое разбивается на два непересекающихся подмножества $V_Б(\Gamma)$ и $V_Ч(\Gamma)$, называемых позициями с ходом белых и черных

соответственно. Ребра этого графа называются ходами белых или черных в зависимости от того, какому из подмножеств $V_Б(Г)$ или $V_Ч(Г)$ принадлежат их начала. Концевые вершины образуют множество целевых ситуаций G. Согласно данному определению, для любой позиции $P \in V(Г)$ существует, вообще говоря, несколько маршрутов с началом в корне Г—начальной позиции Г, и с концом в P.

При необходимости устранить указанную многозначность так же, как и в [2], можно построить ориентированное дерево игры, характеристики которого относительно отношений выигрышности эквивалентны соответствующим отношениям в исходном графе игры Г. В наших дальнейших рассмотрениях этот переход предполагается.

Последовательность вершин (позиций) произвольного маршрута графа игры назовем *ветвью позиций*, а последовательность ребер—*веткой ходов*.

В дальнейшем изложении, если специально не оговорено, все рассуждения ведутся от имени белого игрока (Б).

Через $V_i(G)$ и $U_i(G)$, $i=1, \ldots, n$ будем обозначать множество вершин i-го яруса графа G с корнем и множеством ребер с началами в $V_i(G)$, а через $V(G)$ и $U(G)$—множества всех вершин и всех ребер графа G соответственно.

Для произвольной позиции P графа игры Г *стратегией* G из P, или *P-стратегией,* назовем произвольное поддерево G графа Г с корнем P такое, что:

1) если в i-ом ярусе G ход Б (белых), то из каждой вершины этого яруса исходит не более одного ребра, указывающего на один из допустимых в этой вершине ходов Б;

2) если в i-ом ярусе G ход Ч (черных), то из каждой вершины этого яруса исходят либо все допустимые в ней ходы, либо ни одного.

Легко показать, что P-стратегии являются графическим представлением стратегий управления и что каждой P-стратегии можно однозначным образом поставить в соответствие граф-схему некоторого алгоритма. При этом позиция P определяет начало работы граф-схемы, концевые вершины—заключительные состояния, а ходы черных—условные переходы.

P-стратегию G назовем *наиболее близкой к выигрышной в позиции* P, если для выигрышной P G обеспечивает их независимо от игры противника, а для проигрышной P G удовлетворяет условию $\min\limits_{x \in G_p} \alpha(x)/\beta(x)$, где G_p—множество всех P-стратегий с известным выигрышем одного из противников, $\alpha(x)$—число проигрышных, $\beta(x)$—число выигрышных или ничейных концевых вершин P-стратегии x.

Первый ход произвольной, наиболее близкой к выигрышной P-стратегии, назовем *оптимальным ходом* в P. Данное понятие оптимального в P хода исходит из способности хода обеспечивать достижение наибольшего из возможных в P выигрышей и не учитывает затрачиваемое для этой цели время, зависящее, в частности, от глу-

бины рассматриваемой P-стратегии. Критерий временной оптимальности будет учтен нами посредством требования минимальной сложности алгоритма выбора хода.

Проблема поиска в графе шахматной игры, наиболее близкой к выигрышной *P-стратегии* (ПСГ^{ш}), формулируется следующим образом.

Дано: 1) начальная позиция P_0, алгоритм порождения из произвольной допустимой позиции всех других допустимых позиций для белых (управления, ходы белых) и для черных (возмущения, ходы черных), алгоритмы распознавания выигрышных $Q_в$ и проигрышных $Q_п$ позиций, ничейных позиций или последовательностей позиций $Q_н$;

2) существует отношение ρ, $\rho \subseteq \{P\} \times \{G_p\}$, где $\{P\}$—множество всех позиций, порожденных из P_0, а $\{G_p\}$ — множество всех P-стратегий при $P \in \{P\}$, такое, что пара $\langle P, G \rangle \in \rho$ тогда и только тогда, когда G является некоторой наиболее близкой к выигрышной P-стратегией; таким образом, каждому P соответствует ρ-класс из всех наиболее близких к выигрышной P-стратегии;

3) списки элементарных вычислений АПВ(C_1) и их обращений к оракулу (C_0),

Требуется из множества F_ρ всех тех АПВ из $F(C_0, C_1)$, которые моделируют ρ, выделить АПВ f_π и f_σ такие, что $\pi(\rho, f_\pi) = \pi(\rho, F_\rho)$ и $\sigma(\rho, f_\sigma) = \sigma(\rho, F_\rho)$.

Проблема оптимального управления в шахматах (ПОУ^{ш}) дословно повторяет постановку ПСГ^{ш}, за исключением следующего условия: отношение ρ задается подмножеством декартового произведения $\{P\} \times \{P\}$, где $\{P\}$—множество всех позиций, порожденных из начальной; пара $\langle P, P_i \rangle \in \rho$ тогда и только тогда, когда $\langle P, P_i \rangle$ является некоторым оптимальным в P ходом.

Ясно, что ПСГ^{ш} является частным случаем ПОУ^{ш}.

Вышеизложенное позволяет легко перейти от постановки ПСГ^{ш} и ПОУ^{ш} к ПСГ и ПОУ для произвольных **M**-ситуаций. В дальнейшем изложении, предполагая возможность такого перехода, теоремы формулируются для ПСГ и ПОУ, но в целях наглядности доказательства даются для ПСГ^{ш} и ПОУ^{ш}.

В заключение этого пункта укажем на некоторые параллели между ПСГ и проблемой оптимального управления в ее классической постановке (ПОУ^{к}) [13, 98]. О наличии этих связей отмечено в [12].

Представляется, что ПОУ^{к} может быть определена на основе специальной **M**-ситуации, полученной из общей посредством дополнительных ограничений и при критерии оптимальности, так же как и в ПСГ по быстродействию, но по времени достижения целевой ситуации из произвольной начальной, а не по времени выбора оптимальной стратегии управления для каждой из ситуаций как в ПСГ.

Действительно [13], в ПОУ^{к} ситуации определяются состояниями управляемого объекта, которые в каждый момент времени t характеризуются фазовой точкой $x = (x^1, \ldots, x^n)$ соответствующего n-

мерного векторного пространства. На движение объекта можно воздействовать с помощью управляющего параметра $z=(z^1, \ldots, z^r)$. Процесс управления полностью определяется управлением $z(t)$ и фазовой траекторией $x(t)$. Проблема построения оптимального по быстродействию управления $z(t)$ уточняется следующим образом: среди всех допустимых управлений $z(t)$, под воздействием которых объект переходит из заданного начального состояния x_0 в предписанное конечное состояние x_1, найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время.

В классе ПОУ^к наложением дополнительных ограничений выделяются подклассы проблем, методы решения которых удается связать с развитым математическим аппаратом и поэтому добиться сравнительно высокой их эффективности. Так метод динамического программирования для ПОУ^к ([75], [9]) применим при следующих дополнительных предположениях:

1) существует система дифференциальных уравнений, $\dot{x}=f(x,z)$, описывающая взаимосвязь между состоянием объекта управления x, управлением z и скоростью изменения состояния объекта под воздействием управления — $\dot{x}$;

2) из произвольной точки x фазового пространства всегда существует оптимальный по быстродействию процесс перехода в конечную точку x_1;

3) функция $T(x)$—оптимального времени перехода из точки x в x_1 имеет непрерывные частные производные по $x^1, \ldots x^n$.

При выполнении еще одного требования, а именно:

4) функция $T(x)$ имеет вторые непрерывные производные, а функций $f^i(x, z)$—первые непрерывные производные по x^j $i, j=1,\ldots,n$, справедлива теорема, которая носит название принципа максимума и является основой построения ряда других действенных методов решения соответствующих классов ПОУ^к.

Рассмотрение в ПОУ^к бесконечного множества ситуаций не является принципиальным отличием этой проблемы от ПСГ. Можно перейти к конечному пространству состояний управляемого объекта наложением ограничений на область изменения параметров и рассматривая только их дискретные значения. Основные отличия этих проблем в следующем. В ПСГ в ситуации s требуется найти стратегию управления, обеспечивающую максимально возможный в s выигрыш, и в среднем сделать это за минимальное время. При этом вопрос о том, как быстро эта стратегия приведет к целевой ситуации, не ставится. В то же время в ПОУ^к требуется найти последовательность управлений, которые гарантируют допустимый в s выигрыш и приводят к нему кратчайшим путем — за минимальное время.

В проблеме поиска вывода формул (частного случая ПСГ (см. ниже)), указанные два критерия интерпретировались бы как поиск какого-либо вывода данной формулы за минимальное в среднем время

и как поиск вывода этой же формулы, но кратчайшей длины.

Таким образом, критерии оптимальности по быстродействию в ПОУ^{к} и ПСГ в вышеуказанном смысле независимы и могут рассматриваться совместно, дополняя друг друга.

2.3. Как показано в [12], **М**-ситуации позволяют описывать также проблему поиска вывода формул в исчислении высказываний, которая формулируется как требование построить доказательство заданной формулы при предположениях $A_1, \ldots, A_к$. В этом описании множество ситуаций S определяется всевозможными конечными последовательностями формул исчисления высказываний, а множество управлений C—аксиомами, правилами вывода (здесь только modus ponens) и указаниями относительно номеров формул в последовательности формул ситуаций, к которым должны быть применены аксиомы или правила вывода. При этом множества S и C оказываются бесконечными.

Наши дальнейшие рассмотрения относятся к конечным **М**-ситуациям, т. е. при конечных множествах S, C, D и Q. Поэтому анализ связи **М**-ситуаций с поиском вывода уместно провести для *ограниченной проблемы поиска вывода* (ПВn). Она получается из указанной выше при следующих дополнительных требованиях.

1. Рассматриваются только формулы от не более чем n пропозициональных переменных, представленные в дизъюнктивной нормальной форме. Известно, что число таких формул равно 2^{3^n} [28].

2. В конечных последовательностях формул, образующих ситуации, все формулы должны быть различны.

3. Построение вывода заданной формулы (или указание об его отсутствии) при заданных исходных предположениях должно быть получено за минимальное время. Точнее, требуется построить π, (σ)-оптимальные АПВ, моделирующие отношение ρ между доказываемыми формулами и их выводами из исходных предположений и аксиом.

Ясно, что при ограничениях 1 и 2 множество C также конечно. Поскольку 1 и 2 являются следствием сужения класса рассматриваемых в [12] формул, то связь ПВ$_n$ с **М**-ситуациями, установленная в [12], сохраняется. При этом наложение требования 3 делает ПВ$_n$ частным случаем ПСГ.

2.4. Ограниченная проблема распознавания тавтологий (ТАВТ$_n$) выделяется нами из известной — ТАВТ [105] посредством наложения дополнительных требований 1 и 3, введенных в ПВ$_n$.

Напомним, что в ТАВТ$_n$ требуется распознать тавтологичность, а в ПВ$_n$ — построить конкретную процедуру, в частности такого же распознавания, в форме вывода. Эта связь следует из теоремы Поста [136] о том, что формула исчисления высказываний выводима из аксиом тогда и только тогда, когда она является тавтологией.

2.5. Перейдем к рассмотрению связи вышеуказанных проблем с ПРО. Справедливо следующее

Утверждение 1. *Для каждой из проблем* ПСГ *и* ТАВТ$_n$ *можно указать параметры* ПРО *такие, что соответствующая конкретизация* ПРО *будет эквивалентна этой проблеме.*

Доказательство.

а. ПСГ^{ш} является разновидностью ПРО при нижеследующей конкретизации его параметров:

1) множество M состоит из всех упорядоченных пар вида $\langle P_i, P_j \rangle$, где P_i—произвольная допустимая позиция, а P_j получена из P_i одним ходом;

2) элементами T'_p являются абс. ПМ в M, левые компоненты которых задают произвольные P-стратегии для каждой допустимой позиции P;

3) U совпадает с множеством допустимых позиций;

4) отношение ρ, ранее определенное в ПСГ^{ш}, инициально полно и в данном представлении сохраняется с той лишь разницей, что вместо номера P-стратегии указывается номер абс. ПМ, левой компонентой которой эта P-стратегия является.

Квазифункциональность ρ следует из того, что множества P-стратегий для различных позиций P не пересекаются.

Учитывая конечность множества позиций, легко построить алгоритм, моделирующий ρ за конечное время.

Легко видеть, что вышеописанная ПРО будет эквивалентна ПСГ^{ш}.

б. Проблему распознавания тавтологий от n-переменных (ТАВТ$_n$) [105] можно представить как ПРО следующего вида:

1) M и T'—множества n-мерных булевых векторов и всех абс. ПМ в M соответственно;

2) U—состоит из всех дизъюнктивных нормальных форм от n-переменных;

3) отношение ρ инициально полно и имеет два ρ-класса: первый состоит из ПМ $(M, \varnothing)$, а второй—из всех остальных абс. ПМ. АПВ, распознающий ρ, последовательной проверкой истинности входной формулы на векторах из M определяет принадлежность формулы ρ-классу приближений. Поскольку ρ—однозначное отображение, то оно квазифункционально.

В условии 2) предполагается, что каждая запись из U корректна, т. е. не содержит повторяющихся частей, объединенных знаком конъюнкции (конъюнктов), откуда следует, что U конечно.

Утверждение доказано.

Следствие 1.1. *Можно указать параметры* ПРО *такие, что соответствующие конкретизации* ПРО *будут эквивалентны* ПВ$_n$ *и слабо эквивалентны* ПОУ *соответственно.*

ПВ$_n$ эквивалентна ПРО, поскольку она является частным случаем ПСГ.

Второе утверждение следует из того, что ПРО, эквивалентная ПСГ, будет лишь слабо эквивалентна соответствующей этой ПСГ ПОУ, поскольку алгоритм декодирования оптимальных управлений в опти-

мальные стратегии нам неизвестен. Вопрос эквивалентности ПОУ и ПРО остается открытым.

Замечание 1. В [53] доказано, что ТАВТ эквивалентна в смысле NP-полноты многим трудным вычислительным проблемам в области теории графов, комбинаторики, математического программирования и др. Это означает, что для заданной проблемы L такого типа существует функция кодирования f вычислимая за полиномиальное время и такая, что

$$\forall x(x \in \text{ТАВТ} \leftrightarrow f(x) \in L).$$

От каждой такой проблемы L нетрудно перейти к его конечному варианту L_m ограничением определяющих элементы L параметров.

Например, если L—проблема изоморфизма графов, то L_m есть та же проблема для графов с не более чем m вершинами.

Представляется, что каждую такую проблему L_m можно отнести к классу $\mathbf{L}_1$. Тогда возникает естественный вопрос о представлении L_m как ПРО ввиду наличия этой связи для ТАВТ_n. Из эквивалентности L и ТАВТ в смысле p-сводимости наша эквивалентность непосредственно не следует. p-сводимость порождает лишь утверждения следующего вида:

$$\forall m x \exists \xi_1 n(L \propto \text{ТАВТ} \rightarrow (x \in L_m \leftrightarrow \xi_1(x) \in \text{ТАВТ}_n)$$

и

$$\forall n x \exists \xi_1' m(\text{ТАВТ} \propto L \rightarrow (x \in \text{ТАВТ}_n \leftrightarrow \xi_1'(x) \in L_m),$$

где $\propto$—сводимость, а ξ_1 и ξ_1'—кодирующий и декодирующий операторы, конструкции которых те же, что и при доказательстве p-сводимости. Установление эквивалентности ТАВТ_n и L_m при фиксированных n и m требует дополнительного анализа связи n и m, что необходимо при построении кодирующих операторов. Возможно, что потребуется также расширить наше понятие эквивалентности.

3.1. Перейдем к рассмотрению комбинаторных проблем, представимых через инициально пустые ПРО.

Рассмотрим подкласс ПРО—ПРО1, в которой:

1) отношение ρ инициально пусто и выделяет в T' непустые ρ-образы $\rho(u_1). \ldots, \rho(u_r)$, где $\{u_1, \ldots, u_r\} = U$;

2) вопросы произвольного АПВ f к оракулу имеют следующий вид: пусть u—входная запись и $\rho(u)$—соответствующий ρ-образ; если перенумеровать элементы $\rho(u)$ условно через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p_u}$ и зафиксировать номер a, то f спрашивает: $\beta \in \nu_1(v_a)$ или $\beta \in \nu_0(v_a)$, где β-произвольный элемент из M и v_a—ПМ из $\rho(u)$, которому оракул и f „договорились" присвоить номер a; ответ оракула включает указание о принадлежности β и само β, которое также может использоваться при работе f;

3) ρ можно промоделировать, например, следующим АПВ f: при каждом $u \in U$ f производит опрос оракула и строит гипотезы для некоторого $v \in \rho(u)$; ясно, что для появления v на выходе f достаточно не более $|M|$ вопросов.

Итак, параметры ПРО1 задаются списком $\langle M, T', U_p, C_1 \rangle$.

3.2. Справедливо следующее

Утверждение 2. *Для каждой из проблем расшифровки автоматов по* [116], *формирования понятий по* [124], *формирования экстремального распознающего алгоритма по* [35], *классификации булевых векторов по* [5], *обучения распознаванию образов по* [6, 68, 127], *обучения распознаванию образов в статистической постановке по* [19, 47] *можно указать параметры* ПРО1 *такие, что соответствующая конкретизация* ПРО1 *при определенных дополнительных условиях будет эквивалентна этой проблеме.*

В действительности утверждение 2 выполняется при некоторых дополнительных предположениях на вышеуказанные проблемы, частично приведенных в его доказательстве и частично в § 4, 5. Считая, что они естественны и не выводят за рамки существа указанных проблем, мы сочли возможным не перечислять их в формулировке утверждения 2. Требования к ПРО, относящиеся к принадлежности разрешающих процедур АПВ, рассмотрены отдельно в § 4, 5. А именно, будет показано, что эти алгоритмы не выводят из класса индуктивных выводов—подкласса АПВ.

Необходимо также отметить, что во многих из указанных проблем отсутствует сложностное уточнение либо, как например в [116], оно несколько отлично от данного нами. Тем не менее в описании результата их сравнения нами использовано понятие эквивалентности.

Доказательство утверждения 2.

3.2.1. В проблеме расшифровки автоматов [116] используем определение конечного автомата через множество элементов диаграмм автоматов, данное в работе [43].

Известно, что произвольный автомат может быть задан своей диаграммой (графом). Одновременно произвольная диаграмма задает некоторый автомат, если выполнены следующие условия автоматности:

1) не существует двух ребер с одинаковыми входными пометками, выходящих из одной и той же вершины (условие однозначности);

2) для всякой вершины q и для любого входного символа x существует ребро, помеченное символом x, которое выходит из q (условие полноты) [116].

Используемые нами описания конечных автоматов основаны на диаграммах автоматов, которые задаются через свои элементарные составляющие так называемые элементы диаграммы автомата.

Пусть заданы множества $X=\{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $Q=\{q_1, \ldots, q_s\}$, которые будут называться входным алфавитом, выходным алфавитом и множеством состояний соответственно.

Элементом диаграммы автомата (э. д. а.) назовем произвольный $(2m+1)$-мерный вектор $(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, где $\alpha_i \in \{\Lambda, y_1, \ldots, y_n\}$, $q, \beta_i \in \{\Lambda, q_1, \ldots, q_s\}$, $\Lambda \notin Y$, Q, Λ—пустой символ и $1 \leqslant i \leqslant m$.

Для произвольного э. д. а. a через $(a)_i$, где $0 \leqslant i \leqslant 2m$, будем обозначать его i-ую компоненту.

В произвольном э. д. а. $a=(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ мы кодируем следующую информацию об автомате:

1) из состояния q под воздействием входного символа x_i автомат переходит в состояние β_i и выдает на выходе символ α_i, где $1 \leqslant i \leqslant m$;

2) равенство некоторой компоненты э. д. а. пустому символу Λ означает, что она нам неизвестна.

Произвольное конечное множество э. д. а. A назовем *частичным автоматом*, если A удовлетворяет следующему условию непротиворечивости: для любых э. д. а. $a_1, a_2 \in A$, если $(a_1)_0=(a_2)_0 \neq \Lambda$, то их соответствующие непустые компоненты также равны.

Ясно, что в алфавитах X, Y, Q могут описываться различные неизоморфные автоматы, поэтому совпадение каких-либо компонент заданных э. д. а. не означает совпадения остальных. На рис. 1*a* приведен пример диаграммы автомата при $m=n=2$ и $s=5$, а на рис. 1*b* изображена часть той же диаграммы, соответствующая частичному

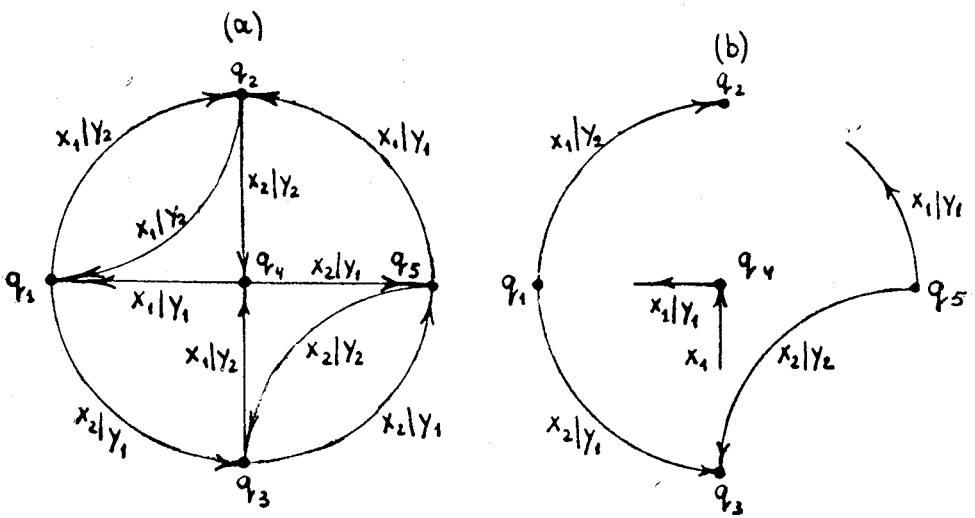

Рис. 1.

автомату $A_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $a_1=(q_1, y_2, \Lambda, q_2, q_3)$, $a_2=(q_1, \Lambda, y_1, q_2, \Lambda)$, $a_3=(q_3, \Lambda, \Lambda, q_4, \Lambda)$, $a_4=(q_4, y_1, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$, $a_5=(q_5, y_1, y_2, \Lambda, q_3)$, $a_6=(q_2, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$.

Частичный автомат A назовем *приведенным*, если $\forall ab(a,b \in A \& (a)_0=(b)_0 \neq \Lambda \rightarrow a=b)$.

Приведенный автомат A' можно получить из частичного автомата A посредством следующей процедуры *склеивания*.

Разобьем A на классы эквивалентности $A_1, \ldots, A_r$ по принципу совпадения первой компоненты в э. д. а. Произвольному классу $A_i=\{a_1, \ldots, a_p\}$ такому, что $(a_1)_0=\ldots=(a_p)_0 \neq \Lambda$, поставим в соответ-

ствие вектор b_i, в котором $\{(b_i)_l\}=\bigcup_{s=1}^{p}\{(a_s)_l\}$, $0\leqslant l\leqslant 2m$. Так как $A_i\subseteq A$ и A—частичный автомат, то в силу выполнения условий непротиворечивости для A, b_i также будет э. д. а. Обозначим через $B_1, \ldots, B_r$ множества э. д. а. такие, что $B_j=\{b_j\}$, если в A_j первые компоненты всех э. д. а. непустые, и $B_j=A_j$, в противном случае, при $j=1, \ldots, r$. Тогда результатом склеивания A мы назовем множество $A'=\bigcup_{j=1}^{r}B_j$.

Так, например, для рассмотренного выше частичного автомата A_1 после склеивания э. д. а. a_1 и a_2 получим приведенный автомат $A'=\{a_1', a_3, a_4, a_5, a_6\}$, где э. д. а. $a_1'=(q_1, y_2, y_1, q_2, q_3)$ получен склеиванием э. д. а. a_1 и a_2. Приведенный частичный автомат A назовем *автоматным графом*, если:

1. $\forall al(a\in A\&1\leqslant l\leqslant m\to(a)_l=\Lambda\&(a)_0\neq\Lambda)$;
2. $\forall ql\exists a(q\in Q_A\&m+1\leqslant l\leqslant 2m\to a\in A\&(a)_0=q\&(a)_e\neq\Lambda)$,

где $Q_A=\bigcup_{a\in A}\{(a)_0, (a)_{m+1}, \ldots, (a)_{2m}\}$, и назовем *конечным автоматом*, если вместо условия 1 выполнено следующее условие:

1'. $\forall al(a\in A\&0\leqslant l\leqslant 2m\to(a)_e\neq\Lambda)$.

Легко видеть, что данное определение эквивалентно определению конечного автомата в [126] без запрещенных пар в левой части команд типа $x_iq_s\to x_jq_r$.

Конечный автомат, изображенный на рис. 1*а*, посредством э. д. а. представляется следующим образом:

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, где $a_1=(q_1, y_2, y_1, q_2, q_3)$, $a_2=(q_2, y_2, y_2, q_1, q_4)$, $a_3=(q_3, y_2, y_1, q_4, q_5)$, $a_4=(q_4, y_1, y_1, q_1, q_5)$ и $a_5=(q_5, y_1, y_2, q_2, q_3)$.

Проблема расшифровки автоматов интерпретируется как разновидность ПРО1, в которой M есть множество всех э. д. а. в заданных алфавитах X, Y, Q; T' есть множество всех абсолютных ПМ таких, что $\nu_1(x)$ задает некоторый конечный автомат, а ρ-образы определяются подмножествами эквивалентных автоматов из T'.

Легко убедиться, что разновидностями ПРО являются также следующие проблемы.

3.2.2. Проблема формирования понятий по [124], где M есть множество всех n-мерных m-значных векторов, а T'-множество абсолютных ПМ, описуемых через „деревья понятий“ [124].

3.2.3. Проблема формирования экстремального распознающего алгоритма по [35] для случая $l=2$, $M_i=\{0, 1\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $D=E_n$, т. е. для 2-х классов в n-мерном булевом пространстве M; при этом множество T' определяется ПМ, характеристические функции которых представимы через „процедуры голосования“ [35]. Представляется, что случай многих классов является разновидностью естественного расширения ПРО1.

3.2.4. Проблема классификации булевых векторов по [5] для случая 2-х классов и T'—множества абс. ПМ, описуемых дизъюнкцией тупиковых тестов обучающей выборки и заданных в форме сокращенной д. н. ф.

3.2.5. Пусть параметры ПРО1 удовлетворяют следующим дополнительным ограничениям:

1) M_1 есть множество n-мерных векторов, каждый из которых представляет результаты измерений некоторого множества объектов n датчиками с конечной и дискретной шкалой измерений;

2) M—подмножество m-мерного евклидового пространства, или пространство параметров;

3) T'—множество абс. ПМ в M таких, что $|\nu_1(v)|=1$ при $v \in T$;

4) для произвольного $c \in M$ существует характеристическая функция $f(x, c)$, $x \in M_1$, которая определяет на M_1 некоторую абс. ПМ;

5) пусть входной записи u соответствует некоторая ПМ v^* из T', где $\nu_1(v^*)=c^* \in M$, а $f(x, c^*)$—характеристическая функция на M_1 для c^*, которой соответствует ПМ z_{v^*} на M_1.

Предполагается, что при каждой гипотезе v на выходной ленте АПВ задает вопросы оракулу о принадлежности элементов из M_1 к $\nu_1(z_{v^*})$ или $\nu_0(z_{v^*})$ в соответствии с некоторой функцией распределения вероятностей, определенной на M_1 и, как правило, неизвестной; полученные ответы сопоставляются с гипотезой v, после чего она корректируется или нет.

Полученная разновидность ПРО1 дает пример расшифровки, когда элементарные описания и множество объектов, о которых задаются вопросы, оракулу различны, но между ними имеется явно заданная связь. Мы полагаем, что ПРО1 с вышеуказанными ограничениями (ПРО1а) есть конечный дискретный аналог проблемы обучения распознаванию образов по [6, 68, 127].

Отметим, что в вышеуказанной интерпретации проблемы обучения распознаванию образов предполагается инициальная пустота входных записей. Это, на наш взгляд, соответствует подходу указанных авторов, при котором образ может быть сформирован на основе анализа большого числа его представителей. Другая форма интерпретации их через ПРО может исходить из принадлежности входных записей к M_1. В этом случае возможны уточнения как через инициально полные ПРО, так и через промежуточные (относительно полноты) ПРО. Указанные представления нетрудно получить аналогичным образом. Однако ввиду увеличения опасности отклонения от идей авторов, а также ввиду того, что в главе 5 проблема формирования образов в инициально полной постановке обсуждается подробно, эти уточнения здесь не проводятся.

Отметим, что проблема параметрической оптимизации в общей постановке и при условии отсутствия явно заданных функционала $J(c)$ и функции распределения вероятностей $p(x)$, когда используются

адаптивные алгоритмы оптимизации [127], может быть аналогичным образом представлена через ПРО. В таком случае можно получить оценки сложности зоны поиска для конечных процессов оптимизации, что весьма актуально для теории этих процессов.

3.2.6. Проблема обучения распознаванию в статистической постановке (ПРС) [19, 47] может рассматриваться как разновидность ПРО1 при следующих дополнительных требованиях:

1) множество M_1 определяется так же, как в ПРО1а;

2) компоненты произвольной абс. ПМ v на M_1 являются реализациями некоторых случайных величин A_1^v и A_0^v для каждой компоненты из ПМ соответственно;

3) на множестве M_1 существуют совместные распределения вероятностей $p(\omega, x)$, $\omega=0,1$, которые задают вероятности событий типа: появился вектор $x \in M_1$ и $x \in \nu_1(v)(x \in \nu_0(v))$, где v—искомая абс. ПМ на M_1; $p(\omega, x)$ характеризует множества элементов из M_1, о принадлежности которых будет задан вопрос оракулу;

4) характеристические функции множества абс ПМ на M_1 могут быть получены как результат сравнения отношения правдоподобия $\frac{p(0, x)}{p(0, 1)}$ с некоторым заранее определенным порогом h; указанные функции принято называть *дискриминантными*;

5) каждую дискриминантную функцию можно однозначно определить некоторым вектором параметров из подмножества M m-мерного евклидового пространства.

Легко увидеть, что в этом случае ПРС может рассматриваться как ПРО.

Замечание 2. Полный учет требований 2—4 в ПРС на наш взгляд приводит к существенно другой зоне поиска решений, чем указанная выше. Действительно, известно, что статистическая задача в общем виде формулируется следующим образом [145]: рассматривается множество M_1 реализаций некоторого случайного объекта с распределением вероятностей $p(x)$ на M_1; пусть W—произвольное подмножество M_1 и $\{H\}$—некоторое множество гипотез фиксированного типа, связанных с $p(x \in W)$ и характеризующих ее; требуется выбрать наиболее достоверную гипотезу из $\{H\}$.

Исследуемые гипотезы могут иметь, например, следующее содержание:

1) $p(x)$ есть распределение такого-то типа;
2) распределение $p(x)$ нормальное и имеет заданные среднее и дисперсию;
3) два рассматриваемых неизвестных распределения одинаковы и др.

Статистические методы применимы к случайным величинам и обнаруживают их специфические, статистические характеристики, которые, вообще говоря, являются лишь симптоматическими к основным глубинным закономерностям исследуемых явлений [31].

Предположение о том, что некая реальная проблема распознавания укладывается в статистическую модель и может быть разрешена статистически, т. е. через построение и выбор достоверных гипотез вышеуказанного типа, равносильно тому, что компоненты M_1^1 и M_1^0 искомой ПМ описуемы в языке статистической теории (т. е. через понятия о среднем, дисперсии, корреляции, типе распределения и т. п.) достаточно полно для их разделения.

Представляется, что эти условия весьма специфичны и далеко не всегда выполняются. Например, допущение о том, что M_1^1 может быть описано через указание векторов средних значений и их дисперсий практически означает следующее. Выбрана система n датчиков (измерителей, предикатов), которые преобразуют реализации некоего случайного объекта A_1 в множество векторов M_1^1 таким образом, что средние значения по каждой компоненте этих векторов характеризуют некие особенности A_1, достаточно существенные, чтобы на их основе, а также по их отклонениям от средних (дисперсии), отделять A_1 от A_0. Это по меньшей мере, означает, что датчики должны быть выбраны для измерения значений тех признаков случайного объекта A_1, которые существенны для отделения A_1 от A_0, т. е. априори предполагает знание существенных для описания A_1 признаков. Однако известно, что выбор существенных признаков, по которым A_1 и A_0 могут быть разделены, является весьма трудной проблемой, сравнимой с решением самой проблемы распознавания.

Если система существенных признаков задана, то статистические методы по существу способны лишь устранить возможные случайные отклонения от средних, измеряемых по этим признакам значений, т. е. устранить помехи при условии, что наши измерители способны оперировать с самим сигналом.

Поскольку статистический подход в проблемах распознавания связывается с восстановлением распределения вероятностей $p(\omega, x)$ и как правило нормального распределения, которое определяется заданием среднего значения и дисперсии, то вышесказанное по существу характеризует требования, необходимые для успешного применения этого подхода. Эти требования кратко могут быть выражены следующим образом:

1) распознаванию подлежат множества реализаций случайных объектов A_1 и A_0;
2) задана система n измерителей (датчиков, признаков), которые преобразуют множества реализаций случайных объектов A_1 и A_0 в множества n-мерных векторов M_1^1 и M_1^0 соответственно;
3) измерители таковы, что анализ средних значений и дисперсий полученных измерений в совокупности достаточен для отделения M_1^1 от M_1^0, т. е. измеряются „существенные“ характеристики A_1 и A_0.

Если указанные требования выполнены для рассматриваемой ПРС, то поиск решения будет производиться в пространстве заранее заданных существенных признаков, что вообще говоря должно уменьшить мощность множества возможных решений, по сравнению с представлением ПРС через ПРОIa.

Заметим, что выполнение второго требования, а именно, возможность адекватного преобразования исследуемых объектов в последовательности чисел—вектора, для многих комбинаторных проблем может принципиально оказаться невозможным.

§ 2. Индукторы и индуктивные выводы

1. Итак, нами показано, что широкий класс известных проблем можно представить в форме ПРО. Алгоритмы решения этих проблем называют соответственно алгоритмами „обучения", „формирования гипотез"; „расшифровки автоматов", „индуктивного обобщения" и т. п. Мы будем придерживаться последнего, этимологически более раннего, термина и будем понимать под алгоритмами индуктивного обобщения процедуры построения некоторого описания исследуемого множества ситуаций по информации об отдельных элементах этого множества, быть может его дополнения до рассматриваемого универсума, а также по известным гипотезам-описаниям указанного множества. Ниже это понятие будет уточнено посредством выделения двух разновидностей алгоритмов индуктивного обобщения—*индукторов* и *индуктивных выводов* (ИВ). Теперь же отметим, что ИВ являются разновидностью АПВ, а индукторы—нет. Однако они тесно связаны с АПВ, поскольку по своей природе они используются как подпрограммы ИВ. Это обстоятельство и дало нам основание отнести ряд проблем, рассмотренных в § 1 и решаемых посредством индукторов, к ПРО, хотя, если следовать их буквальному описанию в литературе, они не являются таковыми.

В настоящее время исследования алгоритмов индуктивного обобщения ведутся в ряде областей, но они почти не связаны друг с другом. Такими относительно самостоятельными разделами являются теория обучающихся систем [6, 127], теория экспериментов с автоматами [72, 116], теория вопросников [75], теория прогнозирования общерекурсивных функций [9] и другие.

Я. З. Цыпкиным показано, что ряд широко распространенных параметрических алгоритмов обучения, использующих аппарат функционального анализа и теории статистических решений, могут быть рассмотрены по некоторой единой схеме и все они являются процедурами, доставляющими экстремум некой усредненной целевой функции [127].

Основные результаты в области экспериментов с автоматами, при различной степени информированности о них, представлены в работах Э. Ф. Мура [72], Б. А. Трахтенброта и Я. М. Барздиня [116].

Вопросы связи расшифровки структуры конечного автомата и принятия решений при отыскании гамильтоновой цепи в графах описаны в [20]. В работах французского исследователя К. Пикара, описанных в [75], рассмотрена возможность построения единых стратегий в задачах по угадыванию задуманного числа, обнаружения фальшивой монеты при помощи безгиревых весов, построения кодов переменной длины и др.

Отметим работы Э. Ханта [124], Ю. И. Журавлева [35], а также [43, 44, 81, 86], характерные привлечением к анализу алгоритмов индуктивного обобщения аппарата дискретной математики и алгоритмического подхода.

Как правило, для указанных алгоритмов используются различные критерии оценки эффективности работы. Во многих случаях утверждения о характере работы алгоритмов формулируются применительно к процессам бесконечной длительности, что лишь в идеале соответствует действительности. Указанные обстоятельства затрудняют теоретическое изучение этих алгоритмов и, в частности, их сравнение между собой с единых позиций.

Многие исследования по индуктивному обобщению проводятся в рамках заранее фиксированных языков, которые зачастую неполны и не позволяют описать даже некоторые типы конечных множеств. К примеру, трехслойные персептроны с ограниченной маской не позволяют описать множество всех связных фигур на конечной сетчатке [35]. Безусловно, выявление ограничений, которые накладывают узкие языки на возможные классификации, имеет важное значение, особенно для случаев, когда выбор определяется удобствами реализации этого языка в конкретных технических устройствах. Однако сейчас нашей целью является не исследование специфики отдельных языков и их возможностей при описании различных типов конечных множеств, а выявление ограничений на алгоритмы, формирующие классификации в процессе индуктивного обобщения.

Общность природы исследуемых в указанных работах явлений и отсутствие достаточной связи между ними нельзя считать нормальным состоянием при дальнейшем развитии теории индуктивного обобщения. Индуктивные выводы с индукторами являются попыткой построения формального описания процедур индуктивного обобщения, которое было бы приемлемо с точки зрения содержательной трактовки известных проблем формирования дескрипторных описаний конечных множеств как проблем расшифровки и одновременно позволяло бы использовать при решении этих проблем идеи и методы теории алгоритмов и дискретного анализа. Эти цели можно уточнить следующим образом:

1. Построить математическую модель процессов индуктивного обобщения, основанную на идеях и методах теории алгоритмов и дискретного анализа и объединяющую основные, указанные выше направления исследований в этой области.

2. Использовать конечные сложностные критерии оценки работы алгоритмов индуктивного обобщения.

3. Установить общие границы возможностей алгоритмов индуктивного обобщения и получить их сравнительные характеристики.

4. Конструктивизировать исследования по индуктивному обобщению и, в частности, перейти к алгоритмическому представлению процессов обучения при ограниченной сложности их протекания.

5. Получить возможность обобщения и распространения результатов, относящихся к исследованным областям (в частности, к теории обучающихся систем и экспериментов с автоматами), на менее изученные области.

Предложенная в данном параграфе математическая модель процессов индуктивного обобщения в конечных множествах, критерии оценки индуктивных выводов и сравнительные характеристики индукторов, описанные в главе 3, являются попыткой построения теории, удовлетворяющей требованиям 1—5.

С целью сравнительного изучения индукторов и ИВ в § 3—5 будет показана возможность представления в рамках указанной формализации ряда известных алгоритмов и, в частности, алгоритмов формирования понятий [124], обучения трехслойного персептрона [68], параметрической адаптации распознаванию образов [127], расшифровки автоматов [116], методов голосования [35] и тестовых методов [5] и др.

Определим понятия индуктора и индуктивного вывода.

2. Пусть M—произвольное конечное множество из k элементов, $k>0$, а T—множество всех ПМ в нем (см. § 2.1). Пусть также $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$, а ОРФ — „общерекурсивная функция“ [38].

Если $|y|\geqslant|x|$, то y назовем *расширением* x и будем писать $y\geqslant x$; если $\nu_1(x)\subseteq\nu_1(y)$ и $\nu_0(x)\subseteq\nu_0(y)$, то x назовем *согласованным расширением* y и будем писать $x\subseteq y$.

Пусть также для произвольного A, $A\subseteq T$ и $A\neq\varnothing$,

$$R(A)=\{x|x\in T\&\exists z(z\in A\&x\subseteq z)\},$$

$$D^l=\{x|x\in T\&|x|=l\},\quad \text{при}\quad 0\leqslant l\leqslant k,$$

$$S_{\geqslant r}=\bigcup_{l=r}^{k}D^l,\quad S_{\leqslant r}=\bigcup_{l=0}^{r}D^l,\quad \text{при}\quad 0\leqslant l\leqslant k.$$

Элементы множества $R(A)$ будем называть *разложением* A.

Введем понятия *индуктора* и *индуктивного вывода* ИВ—алгоритмов индуктивного обобщения.

Произвольную одноместную ОРФ f мы будем называть *индуктором*, если существует множество $T_1\subseteq T$ такое, что

1. $\forall x(x\in T_1\rightarrow f(x)\in T)$,
2. $\forall x(x\in T_1\rightarrow f(x)\geqslant x)$,
3. $\forall x(x\in T_1\&|f(x)|=|x|\rightarrow f(x)=x)$,

4. $\forall x(x \in N \setminus T_1' \to f(x) = \theta + 1)$, где $\theta = |T|$.

Индуктор f назовем *абсолютизирующим*, если выполнено условие

$1^{(1)}$. $\forall x(x \in T_1 \to f(x) \in D^k)$,

и назовем *согласующим*, если выполнено условие

$2^{(1)}$. $\forall x(x \in T_1 \to x \subseteq f(x))$.

Множество всех индукторов обозначим через F, абсолютизирующих индукторов через Ω, согласующих индукторов через F_c и несогласующих индукторов (т. е. элементов множества $F \setminus F_c$) через $F_{нс}$.

ИВ без обратной связи формализуется следующим образом.

Генератором последовательности номеров (ГПН) назовем произвольную ОРФ, значения которой принадлежат T.

ГПН φ назовем *расширяющимся* (РГПН), если $\forall t(\varphi(t) \subseteq \varphi(t+1))$ и *строго расширяющимся* (СРГПН), если $\forall t(t < k \to (\varphi(t) \subset \varphi(t+1)) \vee \vee (|\varphi(t)| = k \& \varphi(t) = \varphi(t+1)))$.

Будем говорить, что ГПН φ согласован с ПМ v, если $\forall t(\varphi(t) \subseteq v)$.

Через $\Phi(v)$ будем обозначать множество всех ГПН, согласованных с ПМ v.

Отметим, что определение ГПН является экспликацией интуитивного понятия „обучающей последовательности", часто используемого в литературе по распознаванию образов. В дальнейшем для каждого ГПН нас будут интересовать лишь значения $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(c)$ при $c \leqslant k$, так как всякая ПМ, составленная из элементов М, может быть описана посредством обучающей последовательности длины не более k, перечисляющей все элементы этой ПМ.

Пусть заданы произвольные индуктор f и ГПН φ. *Индуктивным выводом с индуктором* f над ГПН φ (или сокращенно $[f, \varphi]$-ИВ) назовем функцию h из N в T такую, что

$$h(0) = f(\varphi(0)),$$

$$h(t+1) = \begin{cases} h(t), & \text{если } \varphi(t+1) \subseteq h(t), \\ f(\varphi(t+1)), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $[f, \varphi]$-ИВ h является ОРФ.

3. Определение индуктора и $[f, \varphi]$-ИВ можно обобщить для многоместных ОРФ следующим образом.

Произвольную m-местную ОРФ $f^{(m)}$, при $m > 0$, назовем *индуктором*, если существует множество T_1, $T_1 \subseteq \underbrace{T \times \ldots \times T}_{m}$ такое, что

1. $\forall x_1 x_2 \ldots x_m((x_1, \ldots, x_m) \in T_1 \to f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \in T \& f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \geqslant x_1)$,
2. $\forall x_1 x_2 \ldots x_m((x_1, \ldots, x_m) \in T_1 \& |f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m)| = |x_1| \to f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) = x_1)$,
3. $\forall x_1 x_2 \ldots x_m((x_1, \ldots, x_m) \in N^m \setminus T \to f^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) = \theta + 1)$.

Для наглядности понятие $[f, \varphi]$-ИВ обобщим для случая $m=2$.

Для произвольных индуктора $f^{(2)}$ и ГПН φ *индуктивным выводом с индуктором* $f^{(2)}$ *над* ГПН φ (или сокращенно $[f^{(2)}, \varphi]$-ИВ) назовем функцию h из N в T такую, что

$$h(0)=f^{(2)}(\varphi(0), a_2),$$

$$h(1)=\begin{cases} \xi^{(2)}(\varphi(1), h(0)), & \text{если } \varphi(1)\subseteq h(0), \\ f^{(2)}(\varphi(1), h(0)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$h(t+1)=\begin{cases} \xi^{(2)}(\varphi(t+1), h(t)), & \text{если } \varphi(t+1)\subseteq h(t), \\ f^{(2)}(\varphi(t+1), h(t)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a_2\in T$ и $\xi^{(2)}$—ОРФ, произвольны, но заранее фиксированы. Как правило, в алгоритмах обучения рассматриваются функции $\xi^{(2)}$ такие, что $\xi^{(2)}(x, y)=y$. Однако возможны и другие случаи.

Наконец, опишем процедуры индуктивного обобщения для случая, когда представлена возможность специального типа управления данными, используемыми при построении гипотез, а именно, существует обратная связь между текущей гипотезой и вопросами к оракулу.

Произвольную 3-местную ОРФ q будем называть регулятором, если для нее выполнено условие

$$\forall txy((t, x, y)\in N\times T\times T\rightarrow q(t, x, y)\in T\&\nu_0(q(t, x, y))=\varnothing).$$

Множество всех регуляторов обозначим через Q.

Пусть даны произвольные $f\in F$ и $q\in Q$. Произвольный ГПН φ назовем (f, q)-*порожденным*, а $[f, \varphi]$-ИВ h назовем $[f, \varphi]$-ИВ *с регулятором* q, если φ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\nu_1(\varphi(0))\cup\nu_0(\varphi(0))\subseteq\{a\}$, где a—произвольный фиксированный элемент множества M;

2. $\forall t(t>0)(\nu_1(\varphi(t+1))\cup\nu_0(\varphi(t+1))\subseteq\nu_1(q(t, \varphi(t), h(t))))$.

Пусть заданы произвольные $f\in F$, $q\in Q$ и $v\in T$, тогда (f, q)—порожденный ГПН φ назовем согласованным с v, если φ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi(0)=\varkappa(\nu_1(v)\cap\{a\}, \nu_0(v)\cap\{a\})$;

2. $\varphi(t+1)=\varkappa(\nu_1(v)\cap\nu_1(q(t, \varphi(t), h(t))), \nu_0(v)\cap\nu_1(q(t, \varphi(t), h(t))))$,

где $h(t)$—$[f, \varphi]$-ИВ.

Очевидно, что при фиксированных $f\in F$, $q\in Q$, $v\in T$ существует единственный (f, q)—порожденный и согласованный с v ГПН φ.

Содержательно каждый регулятор определяет некоторый способ формирования вопросов, относящихся к расшифровываемой ПМ. Способ построения (f, q)—порожденного и согласованного с этой ПМ ГПН отражает механизм получения ответов оракула на заданные вопросы. При этом вопросы к оракулу могут, вообще говоря, не зависеть от рассматриваемого ИВ.

Согласно определению ИВ, вопросы к оракулу относятся к типу вопросов ПРО1 и расшифровка ПМ происходит при инициальной пустоте входных записей. Поэтому класс решаемых ИВ ПРО следует относить к ПРО1.

Введенные выше понятия позволяют в рамках общей модели классифицировать многие известные разновидности алгоритмов индуктивного обобщения. Рассмотрим эти классы.

§ 3. Классы индукторов и индуктивных выводов

Ниже приведены описания некоторых типов индукторов и и н дуктивных выводов, полученных в результате интерпретации в вышеизложенной формализации известных в литературе алгоритмов обучения, классифицирования, построения описаний и др. Они получены для алгоритмов, имеющих достаточно полные и точные описания.

Автор заранее приносит извинения за возможные искажения в конструкциях интерпретированных алгоритмов и выражает готовность к их исправлению.

1. Покажем, что процесс обучения трехслойного персептрона [68] интерпретируется соответствующим индуктивным выводом, а алгоритм изменения коэффициентов разделяющей пороговой функции определяет некоторый индуктор.

Пусть M—множество всех n-мерных булевых векторов. Так же как и в [68], пусть $\overline{\Phi}$—некоторый конечный вектор предикатов, определенных на M, $\overline{A}$—вектор коэффициентов той же размерности, что и $\overline{\Phi}$, а $L'_{\overline{\Phi}}$ — множество линейных пороговых функций относительно $\overline{\Phi}$, представимых в виде

$$\psi(x)=[\overline{A}\cdot\overline{\Phi}(x)>0],\quad \text{при}\quad x\in M.$$

Каждая пороговая функция из $L'_{\overline{\Phi}}$ определяет некоторую абс. ПМ из T. Множество таких абс. ПМ мы будем обозначать через $L_{\overline{\Phi}}$. Ясно, что $L_{\overline{\Phi}}$ определяет множество классов эквивалентности в $L'_{\overline{\Phi}}$.

Для произвольного конечного вектора предикатов Φ ЗрФ-*индуктором* назовем произвольную двухместную ОРФ f такую, что

1. $\forall xz((x, z)\in D^1\times L_{\overline{\Phi}}\to f(x, z)\in L_{\overline{\Phi}})$;

2. $\forall xz((x, z)\in N^2\setminus D^1\times L_{\overline{\Phi}}\to f(x, z)=\theta+1)$.

Ясно, что ЗрФ-индукторы образуют подкласс абс. индукторов, в общем случае несогласующих.

Для произвольных абс. ПМ v, ЗрФ-индуктора f и ГПН φ, согласованного с v и $\forall t\ |\varphi(t)|=1$, процесс обучения 3-слойного персептрона будет интерпретироваться $[f, \varphi]$-ИВ следующего вида: $h(0)=f(\varphi(0), H)$,

$$h(t)=\begin{cases} h(t), & \text{если } \varphi(t)\subseteq h(t), \\ f(\varphi(t+1),\ h(t)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где H—абс. ПМ, соответствующая заданному исходному вектору коэффициентов $\bar{A}$.

Вычисление результатов применения ЗрФ-индуктора f^* в $[f^*,\varphi]$-ИВ h с исходной гипотезой $H(\bar{A})$ в [3] производится следующим образом.

$$1.\quad f^*(\varphi(0), H)=\begin{cases} P_1^0, & \text{если } |\nu_1(\varphi(0))|=1 \text{ и } \bar{A}\cdot\bar{\Phi}(\nu_1\varphi(0)))\leqslant 0, \\ P_2^0, & \text{если } |\nu_0(\varphi(0))|=1 \text{ и } \bar{A}\cdot\bar{\Phi}(\nu_0(\varphi(0)))>0, \end{cases}$$

где $\nu_1(P_1^0)=\{x|x\in M\&\bar{A}_1^0\cdot\bar{\Phi}(x)>0\}$,

$\nu_1(P_2^0)=\{x|x\in M\&\bar{A}_2^0\cdot\bar{\Phi}(x)>0\}$ и

$\bar{A}_1^0=\bar{A}+\bar{\Phi}(\nu_1(\varphi(0)))$, $\bar{A}_2^0=\bar{A}+\bar{\Phi}(\nu_0(\varphi(0)))$—векторы коэффициентов абс. ПМ P_1^0 и P_2^0 соответственно.

2. Пусть $h(t)$—гипотеза, полученная на шаге t и $\bar{A}^t$—соответствующий вектор коэффициентов. Тогда

$$f^*(\varphi(t+1), h(t))=\begin{cases} P_1^{t+1}, \text{ если } |\nu_2(\varphi(t+1))|=1 \text{ и} \\ \qquad \bar{A}^t\cdot\bar{\Phi}(\nu_1(\varphi(t+1)))\leqslant 0, \\ P_2^{t+1}, \text{ если } |\nu_0(\varphi(t+1))|=1 \text{ и} \\ \bar{A}^t\cdot\bar{\Phi}(\nu_1(\varphi(t+1)))>0, \end{cases}$$

где $\nu_1(P_1^{t+1})=\{x|x\in M\&\bar{A}_1^{t+1}\cdot\bar{\Phi}(x)>0\}$,

$\nu_1(P_2^{t+1})=\{x|x\in M\&\bar{A}_2^{t+1}\cdot\bar{\Phi}(x)>0\}$ и

$\bar{A}_1^{t+1}=\bar{A}^t+\bar{\Phi}(\nu_1(\varphi(t+1)))$, $\bar{A}_2^{t+1}=\bar{A}^t+\bar{\Phi}(\nu_0(\varphi(0)))$—

векторы коэффициентов абс. ПМ P_1^{t+1} и P_2^{t+1} соответственно. Указанная схема ИВ позволяет рассмотреть и другие виды обучения трехслойного персептрона, описанные в [68].

2. Вычислительные процедуры построения дерева понятий типа CLS, описанные в [124], определяют соответствующие классы индукторов и индуктивных выводов. Убедимся в этом для процедуры $CLS1$.

Пусть $k=m^n$, M—множество всех n-мерных m-значных векторов.

Для произвольных ПМ v и РГПН φ, согласованного с v, произвольные одноместные ОРФ f и h назовем $CLS1$-*индуктором* и $CLS1$ $[f,\varphi]$-ИВ соответственно, если f и h удовлетворяют следующим условиям:

1. $\forall x(x\in T\to f(x)\in D^k)$;
2. $\forall x(x\in T\to x\subseteq f(x))$;
3. $h(0)=f(\varphi(0))$,

$$h(t+1)=\begin{cases} h(t), & \text{если } \varphi(t+1)\subseteq h(t), \\ f(\varphi(t+1)), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

4. $\forall x(x\in N\setminus T\to f(x)=\theta+1)$.

Так как ГПН φ является расширяющимся, то новая гипотеза, полученная на шаге t, должна быть согласована со всей ранее поступившей информацией. Это условие является аналогом свойства $CLS1$—использовать при индуктивном обобщении память неограниченного объема. Очевидно, что $CLS1$-индукторы это согласующие абс. индукторы, а $CLS1$ $[f, \varphi]$-ИВ есть $[f, \varphi]$-ИВ для расширяющегося ГПН. Аналогичную формализацию можно провести для программ $CLSi$, при $1<i\leqslant 9$. При этом $CLS2$- и $CLS5$-индукторы совпадают с $CLS1$-индуктором, $CLS2$-ИВ есть $CLS1$-ИВ с ограничителем, а $CLS5$-ИВ есть $CLS1$-ИВ с регулятором.

Остальные $CLSi$-индукторы могут быть определены посредством некоторых комбинаций условий, указанных выше или близких к ним.

3. Рассмотрим условия, необходимые для отнесения процедуры построения экстремального распознающего алгоритма (э. р. а.) [35] к классу индукторов.

Рассмотрим эту процедуру при $l=2$, $M_i=\{0, 1\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $D=E_n$, т. е. для случая 2-х классов в n-мерном булевом пространстве E_n, все векторы которого считаются допустимыми [126].

Процедура построения э. р. а. F определяется фиксацией следующих алгоритмов:

1) алгоритма F_1 разбиения произвольной ПМ (M_1, M_0) на обучающую ПМ (M_0', M_0') и контрольную ПМ (M_1'', M_2'') такие, что $M_1=M_1'\cup M_1''$ и $M_0=M_0'\cup M_0''$;

2) алгоритма выбора опорных множеств F_2;

3) функций близости F_3;

4) алгоритмов F_4, F_5, F_6 вычисления оценок (при сравнении вектора с вектором и вектора с классом векторов при заданных опорном множестве или классе опорных множеств);

5) решающего правила F_7;

6) функционала F_8 оценки оптимальности построенных распознающих алгоритмов.

Вышеуказанные алгоритмы F_1, F_2, . . ., F_8 перерабатывают произвольную заданную ПМ в э. р. а. в такой последовательности.

Пусть (M_1, M_0)—заданная ПМ. Алгоритм F_1 разбивает (M_1, M_0) на ПМ (M_1', M_0') и (M_1'', M_0'').

Алгоритмы F_2, ..., F_7 по обучающей ПМ (M_1', M_0') задают некоторое параметрическое множество распознающих алгоритмов $\{A\}$, каждый из которых определяется однозначным образом фиксацией конкретных значений конечного числа параметров. Мы будем считать, что области изменения параметров также конечны. Произвольный алгоритм распознавания A, полученный указанным образом, каждому булевому вектору из E_n сопоставляет одно из чисел 0, 1, 2.

При этом, если

$$A(s)=\begin{cases}1, \text{ то } s \text{ принадлежит I классу,}\\ 2, \text{ то } s \text{ принадлежит II классу,}\\ 0, \text{ то } s \text{ не распознан.}\end{cases}$$

Таким образом, каждому алгоритму A соответствует ПМ (M_1^A, M_0^A) такая, что

$$s\in M_1^A \leftrightarrow A(s)=1,$$
$$s\in M_0^A \leftrightarrow A(s)=2,$$
$$s\in E_n \setminus M_1^A \cup M_0^A \leftrightarrow A(s)=0.$$

Функционал F_8 производит выбор такого алгоритма A^* из $\{A\}$, при котором достигается минимальное число ошибок на контрольной ПМ (M_1'', M_0''). Алгоритм A^* объявляется э. р. а.

При соответствующем кодировании вышеуказанных объектов можно показать, что процедура F построения э. р. а. индуцирует соответствующую ОРФ f_F такую, что

1. $\forall x(x\in T \& \nu_1(x)=M_1 \& \nu_0(x)=M_0 \to F(M_1, M_0)=A^* \leftrightarrow$
$\leftrightarrow f_F(x)=\varkappa(M_1^{A^*}, M_0^{A^*})));$

2. $\forall x(x\in N\setminus T \to f_F(x)=\theta+1).$

Тогда для отнесения f_F к классу индукторов достаточно показать, что для произвольной ПМ (M_1, M_0) выполняется следующее неравенство:

$$|(M_1^{A^*}, M_0^{A^*})|\geqslant|(M_1, M_0)|.$$

Видимо, можно показать, что справедливо более сильное утверждение, а именно

$$(M_1, M_0)\subseteq(M_1^{A^*}, M_0^{A^*}),$$

что и будет означать принадлежность f_F к классу согласующих индукторов.

4. Процедуры построения решающих правил для классификации булевых векторов, рассмотренные в [5], относятся к алгоритмам индуктивного обобщения. Приведем интерпретацию указанной процедуры из [5] для случая двух классов векторов.

Произвольную одноместную ОРФ f назовем 1*test*-индуктором, если f удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall x(x\in T \to f(x)\in T).$

Здесь $f(x)$ есть аналог решающего правила из [5], построенного по обучающей выборке x.

2. $\forall x(x\in T \to x\subseteq f(x)),$

так как решающее правило не ошибается на обучающей выборке (теорема 2.2. [5]).

3. $\forall xabv(x, v\in T \& a, b\in M \& x\subseteq v \& a\in \nu_1(f(x)\cap v) \to$
$\to(b\in\nu_1(f(x)\cap v)\leftrightarrow b\in\nu_1(f(x\cup a)\cap v))).$

Это условие требует относительной устойчивости алгоритма распознавания относительно пополнения обучающей выборки произвольным распознанным вектором (теорема 2.3. [5]).

4. Пусть C—матрица перехода от базиса $x_1, \ldots, x_n$ к базису $x'_1, \ldots, x'_n$ в пространстве булевых векторов M.

Тогда условие независимости решающего правила от выбора базиса в M можно представить в следующем виде:

$$\forall x(x \in T \to C(f(x)) = f(Cx)).$$

Из определения следует, что 1*test*-индукторы являются разновидностью согласующих индукторов, обладающих устойчивостью к пополнению обучающей выборки и независимостью к выбору базиса в рассматриваемом булевом пространстве. Решающее правило $f(x)$, полученное на выборке x, использует сокращенную д. н. ф., являющуюся дизъюнкцией всех простых тестов (тупиковых тестов) выборки.

Для случая двух классов это правило может быть представлено в виде композиции характеристических функций компонент выборки x и остается неизменным при фиксированном x для двух разновидностей 1*test*-индукторов—локального и глобального [5].

5. Легко показать, что процедура перехода от табличной формы задания произвольной частично определенной булевой функции к ее представлению через совершенную д. н. ф. определяет некоторый согласующий абс. индуктор. Описание этой процедуры можно найти, в частности, в [26]. Отметим, что вместо совершенной д. н. ф. можно использовать любую другую д. н. ф., сохраняющую единицы булевой функции, (например, соответствующую минимальную д. н. ф. или сокращенную д. н. ф.).

6. Принимая, что „сущность *классификации* (смысл, концепт классификации)—описание интенсиональной структуры классификационного универсума, позволяющее ввести на соответствующем классификационном поле структуру таксонов“ [74], а *классифицирование* есть процесс построения классификации, можно провести определенную интерпретацию этих понятий в терминах, сопутствующих процессу индуктивного обобщения.

Действительно, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$—рассматриваемые универсумы, $P^i_1, P^i_2, \ldots, P^i_{r_i}$—предметные области i-го универсума (состояния M_i), $K^i_1, K^i_2, \ldots, K^i_{r_i}$—классификационные поля, полученные на $P^i_1, P^i_2, \ldots, P^i_{r_i}$ соответственно.

Обозначим через $B(K^i_j)$ — множество всех подмножеств K^i_j.

Тогда каждый акт классифицирования универсума M_1 по заданному множеству таксонов (или их частей) $K \subset B(K^i_j)$ предполагаемой классификации есть акт индуктивного обобщения, определяющий концепт исследуемой классификации для универсума M_1 (интенси-

онал классификации). При этом одновременно определяется классификация на поле K_j^i (экстенсионал классификации).

Алгоритм классифицирования—индуктор в общем случае обрабатывает не только информацию относительно искомой классификации, заключенную в K, но также информацию о классификациях, полученных на более ранних стадиях классифицирования M_1, быть может, на основе других классификационных полей из множества $\{K_1^i, \ldots, K_{r_i}^i\}$.

Описание концепта полученной на M_1 классификации в общем случае использует многоместные предикаты, связывающие универсумы $M_1, M_2, \ldots, M_k$ [40]. Они же могут быть использованы индуктором в процессе построения классификации.

7.1. 1-индукторы, рассмотренные в [81], описывают специальный класс согласующих индукторов для множества M n-мерных булевых векторов. Легко видеть, что $k=|T|=\sum_{i=0}^{2^n} 2^i \cdot C_{2^n}^i=3^{2^n}$. 1-индукторы определяются следующим образом: произвольную одноместную ОРФ f назовем 1-*индуктором*, если выполнены условия:

1. $\forall x(x\in T\to f(x)\in T)$;
2. $\forall x(x\in T\to x\subset f(x))$;
3. $\forall xy(x, y\in T\&x\subseteq y\subseteq f(x)\to f(x)\subset f(y))$;
4. $\forall x(x\in N\setminus T\to f(x)=\theta+1)$.

Множество всех 1-индукторов обозначим через Ξ_n^1, а множество всех абс. 1-индукторов—через Ω_n^1.

Укажем на некоторые простые свойства 1-индукторов:

Свойство 1. $\forall zf(z\in T\&f\in\Xi_n^1\to\forall x(f(x)=z\to x\in R(z)))$, так как из $f(x)=z$ следует, что $x\subseteq z$.

Свойство 2. $\forall zf(z\in D^k\&f\in\Omega_n^1\to\exists x(x\in T\&f(x)=z))$, так как $f(z)=z$, при $z\in D^k$.

Свойство 3. $\forall xf(f\in\Xi_n^1\&f(\varkappa(\varnothing, \varnothing))=z\&x\in R(z)\to z\subseteq f(x))$.

Это свойство непосредственно следует из п. 3 определения 1-индукторов.

Свойство 4. $\forall xy(x, y\in T\to R(x)\cap R(y)\neq\varnothing)$, так как $(\varnothing, \varnothing)\in R(x)\cap R(y)$.

Свойство 5. $\forall z\neg\forall f(z\in T\&f\in\Xi_n^1\to\forall x\in R(z)(f(x)=z))$, так как f—однозначная функция и, в частности, $(\varnothing, \varnothing)\in\bigcap_{x\in T} R(x)$.

Свойство 6. $\forall zf(z\in T\&f\in\Xi_n^1\to\exists x(x\in T\to f(x)\neq z))$, так как $|D^k|=2^{2^n}\geqslant 2$ и $\forall y(y\in D^k\to f(y)=y)$.

Свойство 7. $\forall xf(x\in T\&f\in\Xi_n^1\&|x|=r\&f(x)=z\&x\neq z\to$
$\to\exists y(y\in T\&|y|=k+1\&z\subseteq f(y)))$.

Действительно, в множество всех расширений x, полученных добавлением одного элемента к множествам $\nu_1(x)$, либо $\nu_0(x)$, най-

дется хотя бы одно y такое, что $x \subseteq y \subseteq z$, а поэтому, согласно п. 3. определения 1-индукторов, $z \subseteq f(y)$.

Как видно из п. 3, от 1-индукторов требуется отображать каждую ПМ y в расширения, согласованные с расширениями пар, содержащихся в y. Это требование определяет специфику индуктивных выводов с 1-индукторами. В частности, для подкласса 1-индукторов справедлива следующая

Теорема 1. *Для произвольных абс. 1-индуктора f такого, что $\forall xy(x, y \in T \& x \subseteq y \subseteq f(x) \to f(x) = f(y))$ и РГПН φ, если h—$[f, \varphi]$-ИВ, то*

$$\forall t(f(\varphi(t)) = h(t)).$$

Доказательство. При $t=0$ $h(0)=f(\varphi(0))$, по определению $[f, \varphi]$-ИВ. Пусть $h(t)=f(\varphi(t))$. Покажем, что тогда $h(t+1)=f(\varphi(t+1))$. Действительно. Если $\varphi(t+1) \not\subseteq h(t)$, то $h(t+1)=f(\varphi(t+1))$, по определению $[f, \varphi]$-ИВ. Пусть $\varphi(t+1) \subseteq h(t)$. Тогда $h(t+1)=h(t)$. Так как φ—РГПН и $h(t)=f(\varphi(s))$, $(s \leqslant t)$, то $\varphi(s) \subseteq \varphi(t+1) \subseteq f(\varphi(t))$. Но в таком случае, согласно определению абс. 1-индукторов, $f(\varphi(t+1)) = f(\varphi(t))$ или $h(t+1)=f(\varphi(t+1))$, что и требовалось доказать.

7.2. Оценка числа абсолютизирующих 1-индукторов и некоторые свойства 1-индукторов, связанные с представлением их в виде графов, приведены в [84]. В частности, доказана следующая

Теорема 2 (О. А. Саркисян). $2^{2^{m+1}-1} \leqslant |\Omega_n^1| \leqslant 2^{3^{m+1}-2^{m+1}}$, *где* $m=2^n$.

§ 4. Индуктивные выводы при параметрической адаптации

1. В работе [127] показано, что известные параметрические алгоритмы обучения распознаванию образов являются частными случаями некоторых общих схем оптимизации.

В § 3 была проведена детальная интерпретация через индукторы и индуктивные выводы одной из разновидностей алгоритмов параметрической адаптации—трехслойных персептронов. В данном параграфе будет рассмотрена возможность такой интерпретации для общей схемы.

2. Построение произвольной оптимальной системы предполагает задание цели оптимизации. Выделение состояния системы, при которой цель достигнута, весьма часто сводится к выбору некоторого функционала

$$J(c) = \int_x Q(x, c) p(x) dx = M_x\{Q(x, c)\}$$

и поиску его экстремума.

Здесь $x=(x_1, \ldots, x_e)$—вектор дискретного или непрерывного случайного процесса с плотностью распределения $p(x)$, $c=(c_1, \ldots, c_m)$ — вектор, компоненты которого характеризуют состояние системы,

$Q(x, c)$—функционал вектора c, зависящий от x, M_x—математическое ожидание. Экстремум $J(c)$ находим из уравнения $\nabla J(c) = \mathrm{grad} J(c) = 0$.

В общем виде это уравнение не имеет аналитического решения. В частности, при итеративном подходе оно ищется посредством перехода к разностному уравнению

$$c[t] = c[t-1] - \Gamma[t] \nabla J(c[t-1]),$$

где Γ—квадратная m-мерная матрица, элементы которой, вообще говоря, зависят от текущего значения $c[t-1]$. Надлежащий выбор матрицы Γ должен обеспечить сходимость $c[t]$ к оптимальному значению c^* [127].

Если $p(x)$ неизвестна и предварительно ее нельзя восстановить, а также при отсутствии явно заданного функционала $J(c)$ переходят к другому разностному уравнению, которое по наблюдаемым значениям x, c и $\nabla_c Q(x, c)$ позволяет определить изменение вектора $c[t]$. Это уравнение имеет следующий вид:

$$c[t] = c[t-1] - \Gamma[t] \nabla_c Q(x[t], c[t-1]). \tag{1}$$

В этом случае соответствующие итеративные алгоритмы назы вают *адаптивными* или *обучающими* [127].

При рассмотрении задачи опознания для случая двух классов требуется построить некоторую разделяющую функцию $g(x, c)$ по показам элементов из рассматриваемых классов и указаниям к какому классу они принадлежат. Классы элементов X_1 и X_2 определяются условиями $X_1 = \{x | g(x, c) \leqslant 0\}$, $X_2 = \{x | g(x, c) > 0\}$, а указания о принадлежности элементов к X_1 и X_2 задаются посредством функции Y,

$$Y(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in X_1, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Цель оптимизации задается посредством функционала

$$J(c) = M_x\{F(Y(x) - g(x, c))\}, \tag{2}$$

где F—некоторая выпуклая функция.

Из (1) с учетом (2) получается следующий алгоритм адаптации:

$$c[t] = c[t-1] + \Gamma(t) \nabla_c F(Y[x(t)] - g(x[t], c[t-1])). \tag{3}$$

Выбирая различные выпуклые функции, получаем ряд известных алгоритмов, собранных в работах [126, 127].

Сформулируем условия, при которых процесс обучения посредством алгоритма (3) может быть представлен в рамках описанной в § 1 формализации индуктивного обобщения.

1. Мы полагаем, что каждая компонента вектора x может принадлежать лишь конечному множеству значений. Тем самым мы рассматриваем только конечные пространства X.

2. Обучающая последовательность формируется в соответствии

с некоторыми определенными правилами, в общем случае неизвестными при работе алгоритма адаптации. Предполагается, что правила порождения обучающей последовательности можно задать алгоритмически, а именно, посредством некоторой ОРФ.

При выбранной форме аппроксимирующей функции $g(x, c)$ каждое значение параметра c определяет некоторое разбиение пространства X на два класса. Обозначим множество всех таких пар через L_g.

Перейдем к непосредственной интерпретации алгоритма (3). Тогда в обозначениях $M=X$, $|X|=k$, $L_g \subseteq D^k$ есть некоторое подмножество абс. ПМ.

Произвольную 2-местную ОРФ f назовем *c1-индуктором*, если

1. $\forall xz((x, z) \in D^1 \times L_g \to f(x, z) \in L_g)$;
2. $\forall xz((x, z) \in N^2 \setminus D^1 \times L_g \to f(x, z) = \theta + 1)$.

Ясно, что $c1$-индукторы образуют подкласс абс. индукторов, в общем случае несогласующих.

Рассмотрим процесс адаптации посредством алгоритма (3). Пусть искомому разбиению пространства X при оптимуме вектора параметров c^* соответствует абс. ПМ v, значению $c[0]$—абс. ПМ H_0, обучающая последовательность задается ГПН φ, согласованном с v и таким, что $|\varphi(t)|=1$. Через H_t будем обозначать абс. ПМ, соответствующую разбиению X при векторе параметров $c[t]$, вычисленному согласно (3).

Определим $c1$-индуктор f_c такой, что

$$f_c = (\dot{\varphi}(t+1),\ H_t) = H_{t+1}.$$

Тогда $[f_c, \varphi]$-ИВ h:

$$h(0) = f_c(\varphi(0),\ H_0),$$

$$h(t+1) = \begin{cases} \xi(\varphi(t+1),\ h(t)), & \text{если} \quad \varphi(t+1) \subseteq h(t), \\ f_c(\varphi(t+1),\ h(t)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при выполнении указанных выше условий 1 и 2 при каждом t, $t \leqslant k$, определяет разбиение пространства X, совпадающее с разбиением X посредством разделяющей функции $g(x, c[t])$.

Выбор ОРФ ξ в $[f_c, \varphi]$-ИВ производится в соответствии с конкретными способами изменения вектора параметров c и применяется в тех случаях, когда вновь поступившая информация согласуется с имеющейся гипотезой. В персептронах [68], а также для известных алгоритмов из [6] в подобных ситуациях гипотеза остается неизменной. В других (см. таблицу алгоритмов обучения в [126, 127]) гипотеза изменяется. Представляется естественным, что в последнем случае эти изменения не затрагивают существа имеющейся гипотезы и могут быть описаны некоторой ОРФ ξ.

3. Обсудим другие аспекты полученной интерпретации.

3.1. В условии 1 мы потребовали конечности пространства X. Представляется, что это требование не искажает природы исследуемых явлений. Оно основано на том, что в реальных устройствах, реализующих алгоритмы адаптации, число воспринимающих информацию элементов всегда конечно и, следовательно, воспринимаемая среда конечна.

С другой стороны, число воспринимаемых различных ситуаций можно сделать очень большим, что практически эквивалентно абстракции о бесконечном числе ситуаций.

Введение данного требования в основном связано с желанием оперировать конечными сложностными оценками. В частности, введением границ сложности процесса обучения, вне которых исследования теряют всякий практический интерес.

3.2. В рассмотренной интерпретации предполагалось, что разделяющая функция $g(x, c)$ при каждом c определена для всех x, т. е. $g(x, c)$ производит разбиение X. Аналогичное рассмотрение возможно и для частично определенной функции $g(x, c)$ при условии, что $|\{x|g(x, c)>0\}\cup\{x|g(x, c)\leqslant 0\}|\geqslant 1$ при произвольном c.

3.3. Необходимо заметить, что проводимая нами интерпретация не ставит целью изменить эвристические основы, заложенные в конкретные алгоритмы обучения, но, наоборот, стремится сохранить их. Основные изменения касаются лишь исходных понятий и представлений. Они приводят к рассмотрению конечных множеств объектов и предположению, что обучающие последовательности порождены алгоритмически. Вопрос аналогичного подхода для существенно случайных обучающих последовательностей тесно связан с проблемой обоснования теории вероятностей, исходящей из идей фон Мизеса и А. Н. Колмогорова [39, 140], и его правомерность будет выясняться по мере разрешения этой проблемы.

Отметим, что дальнейшие исследования могут привести к расширению или сужению класса используемых в модели рекурсивных функций.

Сказанное позволяет также считать возможным проведение аналогичной интерпретации для более широких классов алгоритмов адаптации, в частности, псевдоградиентных [128].

3.4. Успешность работы каждого алгоритма адаптации оценивается, во-первых, способностью алгоритма к достижению заданной цели адаптации и, во-вторых, количеством затрат, связанных с работой алгоритма. Эти затраты для конкретных условий работы алгоритмов выражаются через те или иные сложностные оценки описания алгоритма, вычислений, производимых при поиске цели, объема сведений, используемых в процессе работы алгоритма, и др.

Согласно [127] цель адаптации считается достижимой, если последовательность значений $c[t]$ среднеквадратически и (или) почти наверное сходится к c^*, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} M\{\|c[t]-c^*\|^2\}=0 \tag{4}$$

и (или)

$$p\{\lim_{t\to\infty} M\|c[t]-c^*\|=0\}=1, \tag{5}$$

а в качестве показателя качества работы алгоритмов адаптации предлагается дисперсия оценки оптимального вектора c^* в каждый момент времени:

$$v^2[t]=M\{\|c[t]-c^*\|^2\}. \tag{6}$$

Использование указанных критериев (4)—(6) для оценки алгоритмов адаптации связано со следующими трудностями.

1. Вопрос о сходимости алгоритма рассматривается при $t\to\infty$, в то время как практически алгоритм работает лишь конечное число тактов. Поэтому успешный теоретический анализ сходимости алгоритма по критериям (4) и (5) весьма слабо связан с вопросом о его сходимости в реальном процессе адаптации.

2. Критерий (6), даже в случае его успешного использования, оценивает алгоритмы фактически по их „скорости" приближения к экстремуму c^*.

При этом остается в стороне вопрос, какие затраты потребовались для получения данной „скорости" приближения и, в частности, объем необходимых вычислительных операций и использованной информации.

В предложенной нами формализации процесса адаптации, длительность обучения не должна превышать числа возможных ситуаций исследуемой среды, т. е. $k=|M|$. Это ограничение представляется разумным, поскольку легко указать алгоритм, который за не более чем k шагов после предъявления всех ситуаций из M найдет искомую ПМ.

Работу алгоритма мы оцениваем числом тактов работы алгоритма и числом элементов с известной классификацией, необходимых для получения какой-либо ПМ, содержащей искомую. Тем самым качество алгоритма адаптации оценивается в результате совместного анализа скорости достижения цели адаптации и необходимых при этом затрат. Дальнейшее усовершенствование критериев оценки алгоритмов адаптации нам представляется в совместном рассмотрении характеристик указанного типа.

3.5. Отметим некоторые вопросы дальнейших исследований.

В свете предложенных критериев оценки работы индукторов, естественно рассмотреть задачу о сходимости процесса адаптации с использованием алгоритма (3), представленного в виде $[f, \varphi]$-ИВ. При этом, как уже отмечалось в п. 3.4, сходимость алгоритма должна оцениваться комплексно, с учетом объемной и временной составляющих сложности процесса.

Указанную задачу интересно решить в условиях тех или иных конкретных ограничений на рассматриваемые классы ПМ. Тот факт, что не существует общих критериев сходимости $[f, \varphi]$-ИВ для согласующих $c1$-индукторов за менее чем k шагов при произвольных ПМ, является следствием теоремы, сформулированной в главе 3.

Таким образом, вопрос о вышеуказанных критериях сходимости может стать предметом исследования лишь для узких классов абс. ПМ.

Как показано в [127], в основе работы многих известных обучающихся систем опознания, по существу, лежит байесов подход, при котором целью обучения является минимум среднего риска. Возникает задача получения сравнительных сложностных оценок алгоритмов, основанных на байесовом подходе и не использующих его. Примером подобного рода результатов могут служить теоремы главы 3.

Интересно также получить зависимость тех или иных сложностных оценок от степени полноты априорной информации. В частности, определить, в какой мере „за незнание мы расплачиваемся временем обучения" [127] при переходе от задач обучения к задачам самообучения.

§ 5. Индуктивные выводы при расшифровке автоматов

1. Поскольку теория расшифровки конечных автоматов (наряду с теорией статистических выводов) в настоящее время относится к наиболее развитым моделям индуктивного обобщения, вопрос ее взаимоотношения с определенной в § 2 конечной моделью актуален и интересен.

В настоящем параграфе мы намерены обосновать тезис о том, что произвольные процедуры расшифровки конечных автоматов (РА) являются разновидностями ИВ в рамках предложенной модели индуктивного обобщения [43]. Указанное обоснование мы проведем в два этапа. Поскольку понятие „процедура РА" недостаточно детализовано для наших целей, мы вначале покажем моделируемость через ИВ каждого из конкретных понятий и процедур, связанных с РА и рассмотренных в [116]. В частности, в рамках модели мы докажем теоремы-аналоги для кратных и простых безусловных экспериментов расшифровки относительных „черных ящиков" („ч. я.").

Анализ компонент каждой из проинтерпретированных процедур РА показывает, что их можно определить в терминах индукторов, генераторов последовательностей входных слов и схем их взаимодействия, и тем самым описать каждую из указанных процедур через некоторый ИВ, при определенных естественных ограничениях на возможное число состояний автоматов и длительность процессов расшифровок. Это обстоятельство дает основание считать полученный тип ИВ аналогом процедур расшифровки автоматов в данной модели индуктивного обобщения.

Таким образом, выразительные возможности модели позволяют описать процедуры РА. Легко видеть, что обратное в общем случае неверно, так как подкласс индукторов, предназначенных для РА, оп-

ределен только на частичных автоматах, посредством которых задать произвольные конечные множества невозможно.

Относительно высокая развитость теории расшифровок является богатым источником пополнения теории, развиваемой на основе предложенной модели индуктивного обобщения, в частности, через расширение использованных в [116] понятий и соответствующих теорем о частотных расшифровках.

С другой стороны, ряд вопросов, рассмотренных в модели, в частности, теоремы о сравнительных характеристиках согласующих индукторов и невозможности оптимальных регуляторов из главы 3, а также рассмотренные выше типы алгоритмов обучения, формирования понятий и др. могут послужить отправной точкой при исследовании их аналогов в экспериментах с автоматами.

Заметим, что на сигнализирующую времени в модели наложено естественное ограничение, при котором число шагов построения диаграммы „ч. я." не может превышать определенной константы, равной мощности множества всех возможных элементов диаграмм автоматов, достаточных для описания произвольного автомата в заданных алфавитах.

2. Так же как и в [116, стр. 255], под *алгоритмом расшифровки автомата* будем понимать некоторую систему процедур, указывающих конечное множество слов, необходимых при опросе „ч. я.", а также процедур построения диаграммы автомата по результатам опрашивания.

Будем говорить, что алгоритм расшифровки B *моделирует* алгоритм расшифровки A тогда и только тогда, когда для произвольного автомата z имеем:

1) если A расшифровывает z, то B также расшифровывает z;

2) если временная сложность расшифровки z алгоритмом A равна $S(z)$, то временная сложность расшифровки z алгоритмом B равна $\psi(S(z))$, где ψ некоторая общерекурсивная функция (ОРФ).

Наш анализ возможности интерпретации алгоритмов расшифровки в конечной модели индуктивного обобщения будет основан на индивидуальном рассмотрении каждого из алгоритмов. С этой целью дополнительно к понятиям § 3 определим ряд новых понятий, связанных с конечными автоматами.

Для произвольного э. д. а. a (см. § 3) *разложением* a назовем множество $\bar{a}$ всех э. д. а. таких, что все компоненты любого $b \in \bar{a}$ равны Λ, кроме одной, и для $\bar{a}$ выполняются следующие условия:

1. $\forall i \exists b (0 \leqslant i \leqslant 2m \& (a)_i \neq \Lambda \to b \in \bar{a} \& (b)_i = (a)_i)$;

2. $\forall i b (0 \leqslant i \leqslant 2m \& b \in \bar{a} \& (b)_i \neq \Lambda \to (b)_i = (a)_i)$.

К примеру для э. д. а. $a = (q_1, y_1, y_2, \Lambda, \Lambda, \Lambda, q_2)$ разложение $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, где $a_1 = (q_1, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$, $a_2 = (\Lambda, y_1, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$, $a_3 = (\Lambda, \Lambda, y_2, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda)$, $a_4 = (\Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, q_2)$.

Если заданы автомат A и последовательность входных символов $x=x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}$, $c_i \in \{1, \ldots, m\}$, то будем говорить, что последовательность э. д. а. $a_1, \ldots, a_r$ является *путем в автомате* A, *реализующим входное слово* x, если

1. $\forall i \exists b (1 \leqslant i \leqslant r \& b \in A \& \bar{a}_i \subseteq \bar{b})$;

2. для любого a_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ выполняется: $(a_i)_{c_i+m}=(a_{i+1})_0 \neq \Lambda$, $(a_i)_{c_i} \neq \Lambda$ и $(a_i)_j=\Lambda$, при $j \neq c_i$, c_{i+m} и $0 < j \leqslant 2m$.

При этом, если $(a_1)_0=q$, то будем говорить, что путь начинается с состояния q.

Введенные определения позволяют описать используемые в теории автоматов понятия достижимости и различимости состояний автомата нижеследующим образом.

Пусть A конечный автомат и $Q_A=\bigcup\limits_{a \in A}\{(a)_0, (a)_{m+1}, \ldots, (a)_{2m}\}$. Состояния $q_1, q_2 \in Q_A$ назовем *k-различимыми*, если существует слово $x_{c_1}, \ldots, x_{c_k}$ $(1 \leqslant c_i \leqslant m)$ такое, что для двух путей $a_1^1, \ldots, a_k^1$ и $a_1^2, \ldots, a_k^2$, реализующих это слово в автомате A и начинающихся из состояний $q_1=(a_1^1)_0$ и $q_2=(a_1^2)_0$, выполняется условие:

$$\exists l (1 \leqslant l \leqslant k \& (a_l^1)_{c_l} \neq (a_l^2)_{c_l}).$$

Состояние $q_2 \in Q_A$ назовем *k-достижимым* из состояния $q_1 \in Q_A$, если существует слово $x_{c_1}, \ldots, x_{c_k}$ $(1 \leqslant c_i \leqslant m)$ такое, что путь $a_1, \ldots, a_k$ в автомате A, начинающийся из состояния $q_1=(a_1)_0$ и реализующий это слово, приводит в состояние q_2, т. е. $(a_k)_{c_k}=q_2$.

Степенью различимости автомата A $(\rho(A))$ назовем наименьшее k такое, что любые два различимых состояния из Q_A k-различимы.

Степенью достижимости инициального автомата $\langle A, a^* \rangle$ $(\delta(A))$ назовем наименьшее k такое, что любое состояние, достижимое из $(a^*)_0$ k-достижимо. Здесь под инициальным автоматом, как и в классической теории автоматов, понимается произвольный конечный автомат, в котором заранее отмечено некоторое состояние. В нашей интерпретации это эквивалентно выделению некоторых э. д. а., которые мы будем отмечать знаком $*$.

3. Покажем, что в нашей интерпретации каждому алгоритму PA будет соответствовать определенный $[f, \varphi]$-ИВ с некоторым индуктором и ГПН.

Пусть M множество всех э. д. а. в алфавитах X, Y, Q, а T—множество всех ПМ в M. Пусть также T_1 и T_2—множества всех ПМ x таких, что $\nu_1(x)$ задает некоторый частичный или конечный автомат соответственно.

Если имеем ПМ $x \in T$, то через $\bar{x}$ будем обозначать ПМ из T такую, что

$$\nu_i(\bar{x})=\bigcup_{a \in \nu_i(x)} \bar{a},$$

где $i=1, 2$, $\bar{a}$—разложение э. д. а. a.

Для интерпретации процедур расшифровки относительных „ч. я." через некоторый ИВ нам достаточно рассмотреть только такие ГПН φ, для которых

$$\nu_1(\varphi(t))\in T_1 \text{ и } \nu_0(\varphi(t))\equiv\varnothing, \quad \text{при} \quad t\geqslant 0.$$

Произвольный ГПН φ назовем *простым*, если

1. $\nu_1(\varphi(0))=\{a^*\}$, где a^*—произвольный, но фиксированный э. д. а. такой, что $(a^*)_0\neq\Lambda$;

2. Для любого $t>0$ $|\varphi(t)|=|\varphi(t-1)|+1$ и последовательность э. д. а. $\varphi(0)$, $\varphi(1)\setminus\varphi(0)$, ..., $\varphi(t-1)\setminus\varphi(t)$ образует путь в автомате $\nu_1(\varphi(t))$.

Простые ГПН „моделируют" процесс получения информации о „ч. я." в простых экспериментах.

Произвольный ГПН φ назовем *c-кратным*, $c\in N$, если:

1. Для любого t, $(l-1)c\leqslant t\leqslant lc$ и $l>0$ отрезок $\varphi(t)$, $\varphi(t+1)$, ..., $\varphi(lc-1)$ удовлетворяет условиям простого ГПН;

2. Для любого $l>0$, $\varphi(lc)\setminus\varphi(lc-1)=(a)_0$, где a—произвольный, но фиксированный э. д. а. и $\overline{a\supseteq\nu_1(\varphi(0))}$.

Таким образом, $\varphi(t)$ состоит из отрезков путей, которые через каждые c тактов начинаются с одного и того же состояния $(a)_0$.

Сложность расшифровки $S(z)$ „ч. я." z некоторым алгоритмом расшифровки в [116] определяется как функция, равная длине наибольшего слова, которым в процессе расшифровки опрашивался z.

Согласно конкретизации в § 2 константы c_ρ для разновидностей ПРО1 временная сложность относительно ИВ не может превышать $k+1$. Поскольку при расшифровках автоматов в [116] нет ограничений указанного вида, то все нижеследующие утверждения о моделируемости справедливы при условии, что общая длина входной последовательности в экспериментах с автоматами не превышает $k=n^m\cdot s^{m+1}$, где $n=|Y|$, $m=|X|$, $s=|Q|$.

При этом при расшифровке абсолютных „ч. я." мы заранее допускаем число состояний s „ч. я." настолько большим, чтобы обеспечить представимость произвольного „разумного" конечного автомата, использующего алфавиты X и Y в виде некоторого подмножества э. д. а. из М. Например, можно считать, что s равно числу электронов солнечной системы.

4. Теорема 3. *Кратный безусловный алгоритм расшифровки над произвольным относительным „ч. я." z [116] моделируется некоторым $[f, \varphi]$-ИВ, где f—некоторый индуктор, φ—c-кратный* ГПН, $\varphi\in\Phi(\tilde{z})$, $\tilde{z}$—ПМ, *левая компонента которой соответствует z и задает его, а $\Phi(\tilde{z})$—множество всех согласованных с $\tilde{z}$* ГПН.

Доказательство. Пусть s_1—верхняя оценка числа состояний „ч. я.". В [116] приведен следующий $(2s_1-1)$-кратный алгоритм расшифровки: „ч. я." z опрашивается всеми входными словами длины $(2s_1-1)$, строится полное дерево, соответствующее z и затем показы-

вается, что по полученному дереву можно однозначно определить некоторый автомат, который и является результатом расшифровки.

Автомат определяется по полному дереву посредством следующей *процедуры свертывания*: если $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t$—вершины полного дерева, то в последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t$ вычеркивается всякая вершина, неразличимая от какой-либо вершины с меньшим номером; оставшиеся вершины объявляются вершинами искомой диаграммы D.

Пусть B—множество вершин, для которых в дереве существует ребро, выходящее из вершины, отобранной для D, и входящее в B; рассматриваются все вершины $\alpha \in D$ и $\beta \in B$, соединенные в дереве ребром; если $\beta \in D$, то в диаграмме автомата α и β соединяются ребром; если же $\beta \notin D$, то среди вершин, отобранных для D, найдется такая вершина γ, которая неразличима от β; тогда в диаграмме D соединяются вершины α и γ.

Пусть φ $(2s_1-1)$-кратный ГПН из $\Phi(\tilde{z})$, удовлетворяющий условиям:

1. $|\varphi(0)|=1$;

2. Для любых $c_1, c_2 \geqslant 0$, $c_1 \neq c_2$, пути $\varphi(c_i p+1) \setminus \varphi c_i(p)$, $\varphi(c_i p+2) \setminus \varphi(c_i p+1), \ldots, \varphi((c_i+1)p+1) \setminus \varphi((c_i+1)p)$ реализуют различные слова длины $2s_1-1$; здесь $p=2s_1-1$ и $i \in \{1, 2\}$.

ГПН такого типа можно определить следующим образом: лексикографически упорядочить все входные слова длины $2s_1-1$ и определить φ так, чтобы $\varphi((2s_1-1)c), \varphi((2s_1-1)c+1), \ldots, \varphi((2s_1-1)(c+1)-1)$ при любом $c \geqslant 0$ являлась бы реализацией c-ого слова „ч. я." в указанном лексикографическом упорядочении.

Определенный таким образом φ, при $t=(2s_1-1)^m-1$, выдает все пути полного дерева эксперимента высоты $(2s_1-1)$; при этом, так как $\varphi \in \Phi(\tilde{z})$, то эти пути будут согласованы с $\tilde{z}$.

Так как для степеней восстановления $\beta(A)$, различимости $\rho(A)$ и достижимости $\delta(A)$ произвольного конечного автомата A выполняются неравенства $\beta(A) \leqslant \rho(A)+\delta(A)$ и $\beta(A) \leqslant 2s_1-1$, [116, стр. 183], то полное дерево высоты $2s_1-1$ необходимо и достаточно для построения диаграммы расшифровываемого „ч. я.".

Определим согласующий индуктор f следующим образом:

1. $\forall x(x \in T_1 \to f(x) \in T_1)$;

2. $\forall x(x \in T_1 \& |\nu_1(x)| < (2s_1-1)^m-1 \to f(x)=x)$;

3. если $|\nu_1(x)|=(2s_1-1)^m$ и $\nu_1(x)$—дерево, то $\nu_1(f(x))$—конечный автомат, определяемый этим деревом по указанной выше процедуре свертывания;

4. $\forall x(x \in T_1 \& |\overline{x}|=|\overline{f(x)}| \to (f(x)=x)$;

5. $\forall x(x \in N \setminus T_1 \to f(x)=\theta+1)$.

$[f, \varphi]$-ИВ h при определенных таким образом f и φ, при $t_0=(2s_1-1)^m-1$, расшифровывает ПМ $\tilde{z}$, то есть $\nu_1(h(t_0))=\nu_1(\tilde{z})$.

В [116] доказано, что сложность расшифровки $S(z)$ кратным безусловным алгоритмом произвольного относительного „ч. я." не превышает $2s_1-1$.

Сложность ПМ $\tilde{z}$ при $[f, \varphi]$-ИВ h, по определению h, будет удовлетворять неравенству $S_{об}(\tilde{z}, f, \varphi) \leqslant (2s_1-1)^m-1$, что и доказывает теорему. При этом $S_{об}(\tilde{z}, f, \varphi)$ является конкретизацией временной сложности проблем класса ПРО1 относительно ИВ (см. § 4.3).

Отметим, что в кратных безусловных экспериментах имеется в виду инициальная расшифровка автомата, при которой восстанавливается не только диаграмма автомата, но и состояние, в котором находился автомат до начала эксперимента.

Если же расшифровка проводится простым экспериментом, то, в общем случае, диаграмма полученного автомата может не совпадать с диаграммой исследуемого. В экспериментах такого типа, которые будут рассмотрены в следующем пункте, требуется совпадение не диаграмм автоматов, а их „поведения".

5. Рассмотрим процесс расшифровки посредством простых алгоритмов. Для алгоритмов такого типа в [116] введено понятие *остаточной расшифровки*. Говорят, что простой алгоритм остаточно расшифровывает „ч. я." z, если результатом эксперимента является автомат, *поведение* которого совпадает с поведением z.

Поведением автомата $A=(X, Y, Q, \sigma, \delta)$ [116] называется оператор L, преобразующий входные слова в выходные той же длины следующим образом: если $x(1), x(2), \ldots, x(p)$ входное слово, то $(y(1), y(2), \ldots, y(p))=L(x(1), x(2), \ldots, x(p))$ определяется нижеследующими формулами:

$$q(1)=q(0),\ q(t+1)=\sigma(q(t),\ x(t));$$
$$y(t)=\delta(q(t),\ x(t)),\quad \text{где}\quad q(0),\ q(t)\in Q,$$

при $1\leqslant t\leqslant p$, $q(0)$—начальное состояние автомата A, а σ и δ—функции переходов и выходов соответственно.

Теорема 4. *Простой безусловный эксперимент остаточной расшифровки „ч. я." z моделируется некоторым* $[f, \varphi]$-ИВ, *где f—согласующий индуктор, φ—простой* ГПН, $\varphi\in\Phi(\tilde{z})$ *и* $\tilde{z}$—ПМ, *левая компонента которой соответствует z.*

Доказательство. В [116] доказано, что для любого s_1 существует входное слово длины $l=]4s_1^2 \ln (ns_1)m^{2s_1}[$, которое остаточно различает все автоматы, имеющие не более чем s_1 состояний, т. е. при подаче такого слова на вход двух разных автоматов либо они выдают различные слова, либо они реализуют одинаковые операторы L. Такое входное слово можно получить при помощи следующей процедуры: лексикографически упорядочиваем все слова длины l и, начиная с первого слова, проверяем, различает ли рассматриваемое слово все автоматы с s_1 состояниями. Проверку продолжаем до тех пор, пока не найдено искомое слово.

Пусть $x = x_{c_1}, \ldots, x_{c_l}$, $c_i \in \{1, \ldots, m\}$, остаточно различающее слово и φ—простой ГПН такой, что:

1. $|\varphi(0)| = 1$,

2. Последовательность э. д. а. $\varphi(0), \varphi(1) \setminus \varphi(0), \ldots, \varphi(l-1) \setminus \varphi(l-2)$ образует путь в автомате $\nu_1(\varphi(l-1))$, реализующий слово x.

Определим индуктор f так же, как и в теореме 3, однако условия 2 и 3 заменим на следующие:

2^1. $\forall x(x \in T_1 \& |\nu_1(x)| \leqslant l-1 \to f(x) = x)$;

3^1. $\forall x(x \in T_1 \& |\nu_1(x)| = l \to f(x) \in T_2 \& \overline{x} \subseteq \overline{f(x)})$.

Тогда для $[f, \varphi]$-ИВ h будем иметь $h(l-1) = f(\varphi(l-1)) \in T_2$. Согласно условию 3^1 определения индуктора $\overline{\nu_1(\varphi(l-1))} \subseteq \overline{\nu_1(f(\varphi(l-1)))}$ и так как входное слово x остаточно различающее, $\varphi \in \Phi(\widetilde{z})$, то поведение автомата $\nu_1(h(l-1))$ будет совпадать с поведением $\nu_1(\widetilde{z})$.

Сложность расшифровки „ч. я." z простым безусловным алгоритмом $S(z)$, как это показано в [116], равна l. Из построения $[f, \varphi]$-ИВ h следует, что объемная сложность будет удовлетворять неравенству $S_{\text{об}}(\widetilde{z}, f, \varphi) \leqslant l-1$, что и требовалось доказать.

6. Приведенные выше теоремы описывают алгоритмы расшифровки над относительными „ч. я,". Расшифровка абсолютных „ч. я." в [116] рассматривается в классе так называемых *итеративных алгоритмов*.

Кратный итеративный алгоритм использует некоторую неубывающую ОРФ ψ. Алгоритм начинает работать, имея в качестве исходной гипотезы заданный конечный автомат A_0. Далее, на i-ом ($i \geqslant 0$) шаге алгоритм проверяет отличим ли автомат A_{i-1} всеми словами длины $\psi(|A_{i-1}|)$ от „ч. я.". Если неотличим, то алгоритм останавливается и результатом расшифровки объявляется автомат A_{i-1}. В противном случае алгоритм строит новую гипотезу—автомат A_i, посредством свертывания дерева—результата опрашивания „ч. я." словами длины $\psi(|A_{i-1}|)$.

Простой итеративный алгоритм задается с помощью функции $g(t): N \to X^*$, где X^*—множество всех слов в алфавите X и для любого $t > 0$ слово $g(t)$ начинается со слова $g(t-1)$. Алгоритм работает так же, как и кратный итеративный алгоритм, только при каждом шаге i гипотеза и „ч. я." проверяются на отличимость словом $g(|A_{i-1}|)$.

Для интерпретации итеративных алгоритмов мы используем определения *регулятора* и ГПН, *порожденного регулятором,* из § 2.

Покажем, что кратный и простой итеративные алгоритмы расшифровки абсолютных „ч. я." моделируются некоторыми $[f, \varphi]$-ИВ с регулятором q.

Для этого опишем соответствующие регуляторы, ГПН и индукторы.

Кратный алгоритм. Пусть для регулятора q_k выполняются условия:

1. Для любых $x, y \in T$ $\nu_1(q_k(0, x, y))$—некоторый инициальный автомат $\langle A_0, a^* \rangle$;

2. Для любых $t > 0$ и $x, y \in T$, если $\nu_1(y)$—автомат, то $\nu_1(q_k(t, x, y))$—полное дерево опроса автомата $\nu_1(y)$ всеми словами длины $l(t)$, причем $l(t+1) > l(t)$;

3. Для любых $t > 0$, $x, y \in T$, если $\nu_0(x) = \varnothing$, то $q_k(t+i, x_1, y_1) = q_k(t, x, y)$, где $x_1, y_1 \in T$—произвольны и $i > 0$;

4. В остальных случаях $q(t, x, y)$ доопределяется произвольно.

Индуктор f_k определим так, чтобы для любого x, если $x \in T_1$ и $\nu_1(x) \cup \nu_0(x)$ дерево, то $f_k(x) \in T_2$ и определяется алгоритмом свертывания из теоремы 1; в противном случае $f(x) = \theta + 1$, где $\theta = |T_1|$.

Тогда (f_k, q_k)-порожденный и $\langle A_0, a^* \rangle$ - согласованный ГПН φ_k будет обладать следующими свойствами:

1. $|\varphi_k(0)| = 1$, причем $\overline{\varphi_k(0)} \subseteq \bar{a}^*$;

2. Для любого $t > 0$ и $x \in T_2$ $\nu_1(\varphi_k(t+1)) \cup \nu_0(\varphi_k(t+1)) = q_k(t, \varphi_k(t), x)$, при этом $\nu_1(\varphi_k(t+1))$ определяется как часть дерева опроса $q_k(t, \varphi(t), x)$ автомата x всеми входными словами длины $l(t)$, которая соответствует расшифровываемому „ч. я." при опросе его теми же словами.

Простой алгоритм. Регулятор $q_п$ определяется так же, как и в случае кратного итеративного алгоритма, однако условие 2 заменяется на следующее:

2[1]. Для любых $t > 0$, $x, y \in T$, если $\nu_1(y)$—автомат, то $\nu_1(q_п(t, x, y))$—путь, реализующий некоторое входное слово $x(t)$ длины $l(t)$ в автомате $\nu_1(y)$. Для слов $x(t)$ требуется, чтобы $l(t+1) > l(t)$ и слово $x(t+1)$ начиналось со слова $x(t)$.

Индуктор $f_п$ определяется так, чтобы для любого $x \in T_1$, если $\nu_1(x) \cup \nu_0(x)$—путь реализации некоторого слова, то $f_п(x) \in T_2$ и $\nu_1(f_п(x))$ есть минимальный автомат, который остаточно неразличим от исследуемого „ч. я." путем $\nu_1(x) \cup \nu_0(x)$. Тогда $(f_п, q_п)$-порожденный и $\langle A, a^* \rangle$-согласованный ГПН $\varphi_п$ будет обладать следующими свойствами:

1. $|\nu_1(\varphi_п(0))| = 1$, $\overline{\varphi_п(0)} \subseteq \bar{a}^*$;

2. Для любого $t > 0$ и $x \in T_2$ $\nu_1(\varphi_п(t+1)) \cup \nu_0(\varphi_п(t+1)) = q_п(t, \varphi_п(t), x)$, при этом $\nu_1(\varphi_п(t+1)$ есть часть пути $q_п(t, \varphi_п, x)$ реализации некоторого входного слова длины $l(t)$ автоматом x, соответствующая реализации этого слова расшифровываемым „ч. я.".

Если задан некоторый автоматный граф G, то через $\tilde{G}$ обозначим множество ПМ x таких, что $\nu_1(x)$ является конечным автоматом, полученным из G добавлением функции выходов, т. е. $\tilde{G} = \{x | x \in T_2 \& \overline{\nu_1(x)} \cap \bar{G} = \bar{G} \& |\bigcup_{a \in \overline{\nu_1(x)}} \{(a)_0\}| = |\bigcup_{a \in \bar{G}} \{(a)_0\}|\}$.

Пусть задан некоторый $[f, \varphi]$-ИВ h. Через $\widetilde{G}^h$ обозначим подмножество $\widetilde{G}$ таких ПМ, которые расшифровываются h. Будем говорить, что $[f, \varphi]$-ИВ h равномерно с частотой $1-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ расшифровывает абсолютные „ч. я.", если для любого автоматного графа

$$\frac{|\widetilde{G}^h|}{|\widetilde{G}|} \geqslant 1-\varepsilon.$$

В [116] показано, что если проверочная функция $\psi_\varepsilon(s)$ кратного итеративного алгоритма $\sum_{\varphi_\varepsilon}$ удовлетворяет условию

$$\psi_\varepsilon(s) \geqslant]2ms \log_n ns + 4\log_n (s+1)[+] 2\log_n 1/\varepsilon [+ 2, \qquad (1)$$

то $\sum_{\varphi_\varepsilon}$ расшифровывает абсолютные „ч. я." равномерно с частотой $1-\varepsilon$. Из определения $[\psi_k, \varphi_k]$-ИВ h с регулятором q_k, моделирующего алгоритм $\sum_{\varphi_\varepsilon}$, видно, что если для длин слов $l(t)$, посредством которых проверяется соответствие гипотезы расшифровываемому „ч. я.", выполняется аналогичное условие

$$l(t) \geqslant]2ms_1 \log_n ns_1 + 4\log_n(s_1+1)[+]2 \log_n[+ 2, \qquad (1^1)$$

то h также расшифровывает абсолютные „ч. я." равномерно с частотой $1-\varepsilon$.

Отсюда следует

Теорема 5. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $[f_k, \varphi_k]$-ИВ *с регулятором* q_k, *который расшифровывает абсолютные „ч. я." равномерно с частотой* $1-\varepsilon$.

7. Заметим, что кроме задачи расшифровки автоматов в теории экспериментов рассматриваются также диагностическая и установочная задачи.

Диагностическая задача формулируется следующим образом: задана диаграмма автомата, который находится в одном из состояний множества $Q'=\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}\}$; требуется провести эксперимент, в результате которого можно было определить начальное состояние, в котором находился автомат до эксперимента.

Установочная задача—это задача установки заданного автомата с множеством возможных начальных состояний $Q'=\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}\}$ в заданное финальное состояние.

Легко видеть, что эксперимент, решающий диагностическую задачу, решает и задачу установки.

Диагностическая и установочная задачи являются частными случаями задачи расшифровки относительных „ч. я.", и поэтому их можно описать $[f, \varphi]$-ИВ при соответствующих индукторе f и ГПН φ.

8. Итак, рассмотрев моделируемость основных процедур расшифровки автоматов из [116] в общей конечной модели индуктивного обобщения, мы приходим к следующим выводам.

А. Каждая из рассмотренных нами процедур порождения и подачи входных слов на вход „ч. я." является разновидностью ГПН (в частности, ГПН, порожденных регуляторами).

Б. Каждая из рассмотренных нами процедур построения гипотез о диаграммах расшифровываемых автоматов является разновидностью следующего класса РА-*индукторов*:

1. $\forall x(x \in T_1 \to f(x) \in T_1)$;
2. $\forall x(x \in T_1 \to \overline{x} \subseteq \overline{f(x)})$;
3. $\forall x(x \in T_1 \& |\overline{x}| = |\overline{f(x)}| \to f(x) = x)$;
4. $\forall x(x \in N \setminus T_1 \to f(x) = \theta + 1)$,

где f—произвольная одноместная ОРФ.

В. Если число состояний „ч. я." и длина входной последовательности слов не превышает $k = |M|$, то каждая из рассмотренных нами процедур расшифровки автоматов моделируется некоторым $[f, \varphi]$-ИВ, с РА-индуктором f и ГПН φ.

Учитывая также, что:

1) определения ГПН и РА-индукторов охватывают достаточно обширный класс эффективных процедур порождения последовательностей слов и построения конечных объектов,

2) ограничения числа состояний „ч. я." и длительности процедур расшифровки константой k по существу не выводят нас из класса „разумных" процедур расшифровок мы считаем возможным на основе вышеизложенного сформулировать следующий тезис: *произвольная процедура расшифровки конечных автоматов с „разумным" числом состояний и длительностью эксперимента может быть задана некоторым конкретным индуктивным выводом в определенной нами конечной модели индуктивного обобщения.*

В заключение данной главы отметим, что возможность интерпретации в той же модели метода эмпирических предсказаний [36] показана в [33].

Глава 3

К ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ ПРОБЛЕМ РАСШИФРОВКИ ОПИСАНИЙ

§ 1. К построению нижних оценок пиковой сложности

1. Проблемы расшифровки описаний тех или иных закономерностей, представленные нами через ПРО1, традиционно считаются сложными. Предполагается, что точных решений в разумное время для индивидуальных задач этих проблем ждать не приходится, а в каждый момент времени можно лишь иметь некую гипотезу, последовательность которых в процессе индуктивного вывода должна приближаться к истинному решению. Ниже доказывается, что π-сложность ПРО1 может быть оценена снизу длиной специально построенного для данной ПРО1 минимального теста—числа элементарных описаний из M, достаточного для различения истинных решений индивидуальных задач от всех остальных. Тогда при определенных значениях параметров M, T', ρ ПРО1 может иметь π-переборную сложность или стать π-неразрешимой. Полученная связь π-сложности ПРО1 с длинами минимальных тестов требует построения методов их оценки для таблиц с произвольным разбиением на классы. Для одноэлементных классов асимптотические оценки длин минимальных тестов таблиц произвольных размеров приведены в [51]. Однако их использование в наших целях существенно ограничено, ввиду условий одноэлементности и асимптотического характера этих оценок. В последующем § 3 даются два метода построения указанных оценок для произвольных таблиц и их разбиений. В данном параграфе рассматриваются также вопросы расширения выводов о π-сложности ПРО1 на инициально полные ПРО.

2. В дальнейшем изложении *набором* будем называть всякое конечное множество элементов, рассматриваемых вместе с некоторым определенным отношением линейной упорядоченности. *Пустой набор* есть, по определению, пустое множество.

Поднабором набора A мы будем называть всякое конечное множество, составленное из элементов A, рассматриваемое вместе с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью A.

Всякий поднабор набора A, отличный от A, будем называть *собственным поднабором* A.

Число элементов набора A будем называть *длиной* A.

Будем обозначать i-ую компоненту произвольного набора A через $(A)_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, |A|\}$. Таким образом, $A = \{(A)_1, \ldots, (A)_{|A|}\}$.

По определению мы полагаем, что $(A)_0 = (\varnothing)_k = 0$, где A—произвольный Δ_n-набор, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Будем говорить, что наборы A и B *несравнимы по включению*, если $A \not\subseteq B$ и $B \not\subseteq A$.

Пусть T'—произвольная таблица n-мерных попарно различных векторов с разбиением на классы $K_1, \ldots, K_r$, $r \geqslant 2$. Набор координат $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$, $1 \leqslant m \leqslant n$ называют *тестом* относительно разбиения T' на классы $K_1, \ldots, K_r$, если проекции векторов из произвольных различных классов этого разбиения в пространстве, определяемом $x_{i1}, \ldots, x_{im}$, также попарно различны [33, 114, 130]. В противном случае набор $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ называют *недопустимым набором*.

Тест наименьшей длины в множестве всех тестов для $K_1, \ldots, K_r$ называют *минимальным тестом*. Длину его обозначим через $l(K_1, \ldots, K_r)$.

Каждой ПРО можно поставить в соответствие ряд таблиц вышеуказанного типа следующим образом.

Пусть ПРО представлена в форме $\langle M_u, T'_u, U, \rho, C_0, C_1 \rangle$, $\bigcup\limits_{u \in U} M_u = M$, $\bigcup\limits_{u \in U} T'_u = T'$. Представим M в виде некоторого набора, а каждую $v \in T'$ в виде n-мерного булева вектора $\bar{v}$ такого, что $(\bar{v})_i = 1$, если $(M)_i \in \nu_1(v)$ и $(\bar{v})_i = 0$, если $(M)_i \in \nu_0(v)$, где $n = |M|$, $(A)_i$ — i-ая компонента A, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим следующие таблицы τ, τ_u, τ_u^y.

1. τ: классами K_i являются ρ-образы $\rho(u)$, при $u \in U$, $i = 1, \ldots, r-1$, (точнее, двоичные коды ρ-образов), а $K_r = T' \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r-1} K_i$.

2. τ_u: получается из τ посредством пересечения столбцов, соответствующих элементам M_u, со строками, соответствующими элементам T'_u; при этом τ_u разбито на два класса $\rho(u)$ и $\bar{\rho}(u) = T'_u \setminus \rho(u)$.

3. τ_u^y: получается из τ_u включением в первый класс только вектора $y \in \rho(u)$ и неизменном втором классе $\bar{\rho}(u)$.

Соответствующие таблицами τ, τ_u и τ_u^y длины минимальных тестов будем обозначать через $l(T', \rho)$, $l(\rho, u)$ и $l(\rho, u, y)$. Пусть также $l'(\rho, u) = \min\limits_{y \in \rho(u)} l(\rho, u, y)$, $l^*(T', \rho) = \max\limits_{u \in U} l'(\rho, u)$ и $l^0(T', \rho) = \dfrac{1}{|U|} \sum\limits_{u \in U} l'(\rho, u)$.

Ясно, что $l(T', \rho) \geqslant l(\rho, u) \geqslant l(\rho, u, y) \geqslant l'(\rho, u)$ и $l(T', \rho) \geqslant l^*(T', \rho) \geqslant l^0(T', \rho)$, при произвольных $u \in U$ и $y \in \rho(u)$.

3. Справедлива следующая

Теорема 1. *Для произвольной* ПРО1$\langle M, T', U, \rho, C_1 \rangle$

$$\pi(\rho, F_\rho) \geqslant l^*(T', \rho) \text{ и } \sigma(\rho, F_\rho) \geqslant l^0(T', \rho).$$

Доказательство и последующий анализ теоремы проведен только для $\pi(\rho, F_\rho)$ и $l^*(T', \rho)$ в силу его аналогичности для $\sigma(\rho, F_\rho)$ и $l^0(T', \rho)$.

Допустим, что $\pi(\rho, F_\rho) < l^*(T', \rho)$, т. е.

$$\exists f (f \in F_\rho \& \pi(\rho, f) = s < l^*(T', \rho). \quad (1)$$

Пусть $u \in U$ такое, что $l(\rho, u) = l^*(T', \rho)$, оракул задумал $v \in \rho(u)$ и записал на входной ленте u. Пусть также $h_{i_1}, \ldots, h_{im}$—последовательность состояний f при расшифровке v, и $a_{i_1}, \ldots, a_{im}$—элементы M, о принадлежности которых к $\nu_1(v)$ или $\nu_0(v)$ f задавал при $t = i_1, \ldots, i_m$ вопросы к оракулу прежде, чем на выходной ленте был напечатан в момент $t = i_m$, номер некоторого $v' \in \rho(u)$.

Из (1) следует, что $m \leqslant s$ и $x = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$ является недопустимым набором для $\tau_u^{v'}$ даже в случае $l(\rho, u, v') = l(\rho, u)$. Следовательно, найдется ПМ $\tilde{v} \in \overline{\rho}(u)$ такая, что каждый ее элемент $\tilde{x}$ принадлежит либо левой, либо правой компонентам $\tilde{v}$ и v одновременно. Но тогда с учетом инициальной пустоты отношения ρ при расшифровке ПМ $\tilde{v}$ последовательность состояний f (начиная со второго) до момента $t = i_m$ включительно в точности совпадает с $h_{i_2}, h_{i_3}, \ldots, h_{i_m}$ и, следовательно, в этот момент в силу детерминированности f на выходной ленте будет гипотеза, равная v'. Полученное противоречие с (1) доказывает теорему.

Вопросы оценки $l^*(T', \rho)$ при ρ-образах из более чем одного элемента, а также при отсутствии возможности оперировать с таблицей T' в целом, будут рассмотрены в § 3.

Теперь же можно сказать, что при некоторых выполнимых на практике условиях, приводящих к неравенству $l^*(T', \rho) \geqslant n$, ПРО1 относятся к π-переборным. Если же $l^*(T', \rho)$ превышает определенную константу, зависящую от конкретной ПРО1, то эту проблему можно отнести к π-неразрешимой. Решение таких проблем не может быть получено каким-либо регулярным поиском в разумное время и связано со случайностью. Представляется, что данное следствие служит подтверждению аналогичной идеи, высказанной Н. А. Шаниным в мае 1978 г. на симпозиуме в Телави.

При решении таких проблем необходимо рассчитывать, вообще говоря, на гипотезы различной степени правдоподобия, т. е. решать их в приближенной форме, в частности, в форме приближенной ПРО.

4. Возникает вопрос: не может ли π-переборная сложность быть следствием инициальной пустоты входных записей. Интересно указать пример проблемы аналогичного содержания, но с инициальной полнотой входных записей и, в частности, исследовать с этих позиций ПСГ^{ш}.

В настоящее время аппарат для исследований сложности инициально полных проблем находится в начальной стадии развития. При его построении представляет, в частности, интерес возможная связь между оценками π-сложности ПРО и длинами минимальных

тестов. В первом приближении можно исходить из следующих предположений.

Решение каждой индивидуальной задачи ПРО формируется в в некотором языке и должно отличаться от тех объектов пространства поиска решений, которые решениями не являются. Допустим, что элементами описаний этих объектов являются элементы M и формирование каждого описания требует элементарных вычислений, число которых не менее длины этого описания. При этих предположениях можно считать $S(u, f, \rho) \geqslant l'(\rho, u)$, а нижней оценкой π-сложности—число $l^*(T', \rho)$. Вывод о π-переборной сложности исследуемой ПРО может быть сделан, если для некоторого $u \in U$ $l'(\rho, u) \geqslant |M_u|$, и о π-неразрешимости, если $|M_u|$ „большое" число.

Итак, посредством $l^*(\rho, u)$ можно оценить снизу π-сложность ПРО1 и при некоторых предположениях получить предварительное представление о сложности произвольных ПРО. Указанная связь дает основание для проведения исследований методов вычисления $l^*(\rho, u)$. Прежде чем приступить к ним, еще раз отметим, что одна и та же комбинаторная проблема может быть описана разными ПРО с соответствующим множеством тестов, и потому оценки сложности через длины тестов имеют относительный характер и определяются конкретным представлением данной проблемы через ПРО. Добиться независимости оценок сложности конечной проблемы от языка ее представления является трудной задачей, в частности, из-за того, что сложность процедур кодирования и декодирования данных является существенной компонентой полной сложности.

5. Известные в настоящее время методы вычисления минимальных тестов (или их длин) для заданных таблиц [33, 77, 113] связаны с попарным сравнением по существу всех подпространств заданного n-мерного пространства и при $n \geqslant 20$ практически нереализуемы. С другой стороны, информация о классах $K_1, \ldots, K_r$, в частности о $\rho(u)$ и $\bar{\rho}(u)$, априори не всегда бывает полной, что исключает даже принципиальную возможность точного вычисления длин минимальных тестов таких таблиц. Поэтому наш дальнейший анализ оценок сложности ПРО будет связан с поиском регулярных методов построения нижних оценок длин минимальных тестов при неполной априорной информации о классах векторов $K_1, \ldots, K_r$. Нами рассматриваются три типа такой информации: 1) длины попарно несравнимых нетестовых наборов данной таблицы вместе с числами наборов каждой длины; 2) число различных нетестовых наборов, полученных попарным сравнением векторов из разных $K_1, \ldots, K_r$; 3) мощности $K_1, \ldots, K_r$.

Для уточнения этих данных опишем один из алгоритмов вычисления минимальных тестов из [33].

6. Пусть $K_1, \ldots, K_r$—разбиение таблицы T_1 n-мерных булевых векторов, $|K_i| = n_i$ $i = 1, \ldots, r$.

Произвольный недопустимый для $K_1, \ldots, K_r$ набор A назовем

максимально недопустимым набором (м. н. н.) для $K_1, \ldots, K_r$, если каждый набор B, для которого A является собственным поднабором, является тестом для $K_1, \ldots K_r$.

Как о частном случае данного определения можно говорить о м. н. н. для заданной пары векторов. Минимальный для $K_1, \ldots, K_r$ тест можно вычислить следующим образом:

1. Попарным сравнением каждого вектора из K_i со всеми векторами из $\bigcup_{j=i+1}^{r} K_j$, $i=1, \ldots, r-1$ выделим все м. н. н. получаемых пар векторов; ясно, что м. н. н. пары векторов α и β есть упорядоченное множество номеров тех координат, в которых α и β совпадают; ясно также, что мощность m полученного множества S' м. н. н. не более $\sum_{i=1}^{r-1} n_i \left(\sum_{j=i+1}^{r} n_j \right)$;

2. Для каждого м. н. н. из S' выделим все недопустимые наборы, являющиеся поднабором этого м. н. н.; множество всех полученных недопустимых наборов обозначим через S_1;

3. Если R_n—множество всех поднаборов $\{1, \ldots, n\}$, то каждый из наборов $R_n \setminus S_1$ будет тестом для $K_1, \ldots, K_r$; минимальным тестом будет один из наборов наименьшей длины множества $R_n \setminus S_1$.

Из алгоритма следует, что множество S', а также выделенное из него множество S'' всех попарно несравнимых недопустимых наборов (м. п. н. н.) содержат полную информацию о минимальных тестах.

7. Пусть $S=\{S_1, \ldots, S_m\}$—произвольное множество наборов из R_n.

Разобьем множество S на непустые подмножества $P_1, \ldots, P_k$, где $k \geqslant 1$, каждое P_i состоит из наборов некоторой фиксированной длины l_i и длины наборов, входящих в различные множества $P_1, \ldots, P_k$, различны.

Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 > l_2 > \ldots > l_k$; числа $|P_1|, \ldots, |P_k|$ будем обозначать через $m_1, \ldots, m_k$.

Последовательность чисел $\chi=(n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$, полученных указанным образом, будем называть *характеристической последовательностью* (х. п.) *множества наборов* S.

Произвольную целочисленную последовательность вида $\chi=(n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ будем называть *характеристической последовательностью* (х. п.), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $n \geqslant l_1 > l_2 > \ldots > l_k \geqslant 0$;

2. $m_i \neq 0$, при $i=1, \ldots, k$.

Произвольную пару чисел (n, m) таких, что $n>0$ и $m<2^n$, назовем *характеристической парой* или *двойкой* (х. д.). Для произвольного множества Δ_n-наборов S х. д. множества S назовем пару $(n, |S|)$.

8. Итак, пусть $K_1, \ldots, K_r$—разбиение таблицы T' n-мерных бу-

левых векторов, $|K_i|=n_i$, $i=1, \ldots, r$, $r\geqslant 2$, $n_1\geqslant n_2\geqslant \ldots \geqslant n_r$, S'—множество всех м. н. н. пар векторов из $K_1, \ldots, K_r$, $m=|S'|$, S''—м. п. н. н. для $K_1, \ldots, K_r$. *Характеристической последовательностью таблицы T' типа x* назовем х. п. $\chi=(n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ для S'', если $x=\chi$, х. д. $\eta=(n, m)$ для S', если $x=\eta$, и $\xi=(n, n_1, \ldots, n_r)$, если $x=\xi$.

Пусть K_χ—класс всех м. п. н. н. с х. п. χ, K_η—класс подмножеств R_n мощности m, T_ξ—множество всех таблиц с х. п. ξ, $S'(z)$—множество всех м. н. н. пар векторов из классов таблицы z, $m_\xi=\min\limits_{z\in T_\xi}|S'(z)|$, $N_i(S)$—число всех поднаборов длины i наборов из S, $S\subseteq R_n$, и $i_x^*=\min\limits_i(0\leqslant i\leqslant n \& \exists S(S\in K_x \& N_i(S)<C_n^i)$, при $x=\chi$; η.

Ясно, что i_x^* является нижней оценкой длины минимального теста произвольной таблицы, заданной своей х. п. типа $x=\chi$ или $x=\eta$ соответственно.

Если же таблица задана посредством х. п. ξ, то нижней оценкой будет $i^*_{\eta(\xi)}$, где $\eta(\xi)=(n, m_\xi)$; при этом $i^*_\eta\geqslant i^*_{\eta(\xi)}$.

В § 3 будут описаны алгоритмы вычисления i^*_χ и i^*_η. Они основаны на решениях соответствующих экстремальных комбинаторных задач, сформулированных в следующем параграфе.

Для вычисления же $i^*_{\eta(\xi)}$ при произвольном ξ необходимо оценить m_ξ. В общем случае решение этой задачи нам неизвестно. При $\xi=(n, n_1, n_2)$ есть основание проверить следующую гипотезу: для таблицы T' с классами $K_{1\xi}=\{0, 1, 2, \ldots, n_1-1\}$ и $K_{2\xi}=\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n_2-1}\}$, где элементы $K_{1\xi}$ даны в десятичной записи, а элемент $\overline{i}$ класса $K_{2\xi}$, при $0\leqslant i\leqslant n_2-1$, получается из двоичной записи i заменами $0\to 1$ и $1\to 0$, $|S'(T')|=m_\xi$, и длина минимального теста T' равна $i^*_{\eta(\xi)}$. Если гипотеза подтвердится, то $S'(T')$ совпадает с уплотненным множеством $E_{\eta(\xi)}$ (см. § 2), а $i^*_{\eta(\xi)}$ будет точной нижней оценкой длин минимальных тестов в классе всех таблиц с х. п. ξ. Отметим, что при $\xi=(n, 1, n_2)$, $m_\xi=n_2$.

§ 2. Системы несравнимых и произвольных множеств с наименьшим числом подмножеств

1. В данном параграфе дается описание решений двух экстремальных комбинаторных задач, связанных с построением систем множеств с минимальным числом подмножеств. В следующем § 3 рассматриваются алгоритмы оценки длин минимальных тестов, основанные на указанных решениях.

Первая комбинаторная задача формулируется следующим образом.

Для заданных конечного множества M и целочисленного набора $l_1, \ldots, l_k$, $m_1, \ldots, m_k$ построить m_1 подмножеств множества M мощности $l_1, \ldots, m_k$ подмножеств множества M мощности l_k таких, чтобы эти множества попарно не содержались бы друг в друге и чтобы

ля произвольного натурального числа i число всех различных подмножеств мощности i, полученных из этих множеств, было бы наименьшим [78, 85].

Приводятся беспереборные алгоритмы построения указанной экстремальной системы подмножеств множества M, названной в работе $+1$-*уплотненным множеством*, вычисления числа подмножеств $+1$-уплотненного множества заданной мощности, а также доказательство того факта, что полученная система искомая.

Для фактического построения $+1$-уплотненного множества необходимо последовательно отсчитать $m_1+m_2+\ldots+m_k$ лексикографически упорядоченных подмножеств множества M, а затем взять их дополнения до M. При этом оказывается, что $+1$-уплотненное множество построено самым экономным способом в том смысле, что оно использует лишь то минимальное число элементов множества M, из которых вообще возможно построение подобного рода систем.

$+1$-уплотненные множества доставляют минимум формулы „включения—исключения". Поэтому можно надеяться, что эти множества окажутся полезными в дискретных задачах на экстремум с применением этой формулы. На одно из таких приложений указано в следующем параграфе. А именно, на основе $+1$-уплотненных множеств построен сравнительно простой алгоритм, который доставляет нижнюю оценку длины минимального теста для произвольных таблиц с заданной х. п. $(n_1, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$.

Вторая комбинаторная задача формулируется следующим образом.

Для заданных х. д. $\eta=(n, m)$, K_η, i^*_η, $N_i(S)$, определенных в § 1, построить систему $S^*\in K_\eta$ такую, что $\forall S(S\in K_\eta\to N_{i^*_\eta}(S^*)\leqslant N_{i^*_\eta}(S))$ [92].

Так же, как и для первой задачи, даются беспереборные алгоритмы построения системы S^*, названной $+2$-уплотненным множеством, вычисления $N_i(S^*)$, при $0\leqslant i\leqslant n$, а также доказательство того факта, что система S^* искомая.

Для построения $+2$-уплотненного множества достаточно n разрядным двоичным кодам чисел $2^{n+1}-1, 2^{n+1}-2,\ldots,2^{n+1}-m$ сопоставить наборы из R_n, при котором „1" в произвольном j-ом разряде числа α указывает на отсутствие числа j в наборе, поставленном в соответствие α.

Число i^*_η легко вычислить посредством последовательного сравнения сумм 0, 2^{n-1}, $2^{n-1}+2^{n-2}, \ldots$ с $m-1$ и выделения наименьшей из них, превышающей $m-1$. Число ее слагаемых и будет равно i^*_η.

Введем необходимые определения и сформулируем решения указанных задач.

2. Через $I_{n,p}$, где n, p—произвольные целые положительные числа или нули, обозначим набор $\{p+1, \ldots, p+n\}$, а через $R_{n,p}$—множество всех поднаборов $I_{n,p}$. Если $p=0$, то индекс p в соответствующих местах обозначений будет опускаться. Если $n=0$, то $R_{0,p}=I_{0,p}$ есть, по определению, пустой набор.

Элементы множества $R_{n,p}$ будем называть $\Delta_{n,p}$-*наборами*; $\Delta_{n,p}$— наборы длины k, $0 \leqslant k \leqslant n$, назовем $\Delta^k_{n,p}$-наборами (соответственно будем говорить о $\Delta^k_{n,p}$-поднаборах, собственных $\Delta^k_{n,p}$-поднаборах).

Через $R^k_{n,p}$ обозначим множество всех $\Delta^k_{n,p}$-наборов. Очевидно, $|R^k_{n,p}| = C^k_n$, при $0 \leqslant k \leqslant n$ и $|R_{n,p}| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} R^k_{n,p}\right| = \sum_{k=0}^{n} C^k_n = 2^n$.

Для $\Delta_{n,p}$-наборов мы введем действия объединения $\bigcup$, пересечения $\bigcap$, вычитания, определяемые следующим образом: если A и B суть $\Delta_{n,p}$-наборы и P и Q—множества их элементов, то $A \bigcup B$ (соответственно $A \bigcap B$, $A \setminus B$) мы определяем как множество $P \bigcup Q$ (соответственно $P \bigcap Q$, $P \setminus Q$), рассматриваемые совместно с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью в наборе $I_{n,p}$.

Определим в $R_{n,p}$ отношение линейной упорядоченности $\prec_1$.

Для произвольных различных $\Delta_{n,p}$-наборов A, B, $B = \{b_1, \ldots, b_{k_2}\}$, $A = \{a_1, \ldots, a_{k_1}\}$, мы полагаем:

1. Если $k_1 \neq k_2$, то: а) A меньше $B (A \prec_1 B)$, если $k_1 < k_2$; б) B меньше $A (B \prec_1 A)$, если $k_2 < k_1$.

2. Пусть $k_1 = k_2$. Тогда существует j, $0 \leqslant j \leqslant k_1 - 1$ такое, что $a_i = b_i$, при всяком $i \in I_j$, и $a_{j+1} \neq b_{j+1}$. Мы полагаем: а) $A \prec_1 B$, если $a_{j+1} < b_{j+1}$; б) $B \prec_1 A$, если $b_{j+1} < a_{j+1}$.

Отношение, противоположное к $\prec_1$, будем обозначать через $\succ_1$ (больше). Если $\Delta_{n,p}$-набор A меньше или равен $\Delta_{n,p}$-набору B (соответственно A больше или равен B), то будем писать $A \preccurlyeq_1 B$ (соответственно $A \succcurlyeq_1 B$).

Легко видеть, что упорядоченное множество $R_{n,p}$ изоморфно вкладывается в множество всех лексикографически упорядоченных слов в n-буквенном алфавите. Поэтому введенное в $R_{n,p}$ отношение упорядоченности $\prec_1$ мы будем называть *лексикографическим*.

Последовательность $\Delta_{n,p}$-наборов $A_1, \ldots, A_m$ назовем $+1$-*уплотненной*, если

$$\forall j (j \in I_{m-1} \rightarrow (A_j \prec_1 A_{j+1} \& \neg \exists A (A \in R_{n,p} \& A_j \prec_1 A \prec_1 A_{j+1}))),$$

и -1-*уплотненной*, если

$$\forall j (j \in I_{m-1} \rightarrow (A_j \succ_1 A_{j+1} \& \neg \exists A (A \in R_{n,p} \& A_j \succ_1 A \succ_1 A_{j+1}))).$$

$\Delta_{n,p}$-набор $B = \{b_1, \ldots, b_{k_2}\}$ назовем k_2-*расширением* $\Delta_{n,p}$-набора $A = \{a, \ldots, a_{k_1}\}$, если $k_2 \geqslant k_1$ и при любом i от 1 до k_1 выполняются равенства $a_i = b_i$.

Произвольное k-расширение B $\Delta_{n,p}$-набора A назовем *расширением* A, а отношение „набор B является k-расширением набора A“ будем называть *отношением k-расширения*.

Расположенную в лексикографическом порядке последовательность $\Delta^{k_2}_{n,p}$-наборов, составленную из всех различных k_2-расширений всех наборов какой-либо последовательности $\Delta^{k_1}_{n,p}$-наборов $A_1, \ldots, A_m$,

либо какого-либо множества $\Delta_{n,p}^{k_1}$-наборов S, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, назовем *$k_2$-продолжением последовательности* $A_1, \ldots, A_m$ соответственно *k_2-продолжением множества* S.

Ясно, что k_2-продолжение произвольного множества $\Delta_{n,p}^{k}$-наборов S совпадает с k_2—продолжением произвольной последовательности, составленной из всех наборов множества S, а k_2-продолжение произвольной последовательности $\Delta_{n,p}^{k_1}$-наборов совпадает с k_2-продолжением множества всех наборов этой же последовательности.

Заметим, что некоторые множества или последовательности $\Delta_{n,p}^{k_1}$-наборов могут не иметь k_2-продолжений.

Для произвольного $\Delta_{n,p}$-набора A всякий набор $B = A \cup C$, где C—произвольный $\Delta_{n,p}$-набор, будем называть *$\Delta_{n,p}$-наднабором* набора A.

$\Delta_{n,p}$-наднабор B набора A назовем *собственным $\Delta_{n,p}$-наднабором* A, если B отличен от A.

В частности, каждое k-расширение произвольного $\Delta_{n,p}$-набора A является одновременно $\Delta_{n,p}$-наднабором A.

Заметим также, что число k-расширений пустого набора определяется параметром n. Поэтому мы будем пользоваться терминами „пустой $\Delta_{n,p}$-набор", или „$\Delta_{n,p}^{0}$-набор".

При произвольном k, $0 \leqslant k \leqslant n$, через $\Gamma_n^k(1), \Gamma_n^k(2), \ldots, \Gamma_n^k(C_n^k - 1)$, $\Gamma_n^k(C_n^k)$ обозначим $+1$-уплотненную последовательность, составленную из всех Δ_n-наборов длины k, а через $L_n^{n-k}(j)$, при $j \in \{1, 2, \ldots, C_n^k\}$, обозначим разность $I_n \setminus \Gamma_n^k(j)$.

Для произвольной х. п. $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ *уплотненным множеством* L_χ с х. п. χ назовем множество Δ_n-наборов вида:

$$L_\chi = \{L_n^{l_1}(1), L_n^{l_1}(2), \ldots, L_n^{l_1}(m_1), L_n^{l_2}(\widetilde{m}_1 + 1), \ldots, L_n^{l_2}(\widetilde{m}_1 + m_2), \ldots$$

$$\ldots, L_n^{l_k}(\widetilde{m}_{k-1} + 1), \ldots, L_n^{l_k}(\widetilde{m}_{k-1} + m_k)\},$$

где $L_n^{l_{j+1}}(\widetilde{m}_j) = I_n \setminus \Gamma_n^{n-l_{j+1}}(\widetilde{m}_j)$ и $\Gamma_n^{n-l_{j+1}}(\widetilde{m}_j)$ есть наибольшее в лексикографическом упорядочении $(n - l_{j+1})$-расширение последнего набора последовательности $\Gamma_n^{n-l_j}(1), \Gamma_n^{n-l_j}(2), \ldots, \Gamma_n^{n-l_j}(\widetilde{m}_{j-1} + m_j)$, имеющего непустое $(n - l_{j+1})$-продолжение, при $j = 1, 2, \ldots, k-1$, $\widetilde{m}_0 = 0$.

Из данного определения видно, что для построения уплотненного множества с заданной х. п. $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ по существу необходимо построить в лексикографической последовательности $\sum_{j=1}^{k} m_j$ Δ_n-наборов.

Для множества попарно несравнимых по включению наборов (м. п. н. н.) справедлива следующая

Теорема 2 (о минимальном числе подмножеств). *Для произвольной х. п. χ, если K_χ—класс всех м. п. н. н. с х. п. χ, L_χ—уплотненное множество с х. п. χ, то:*

1. *Класс K_χ непустой, тогда и только тогда, когда можно построить уплотненное множество L_χ с х. п. χ;*

2. *Если класс K_χ непустой, то для произвольных i и S, где $0 \leqslant i \leqslant n$, $S \in K_\chi$, число всех различных подмножеств мощности i, полученных из наборов множества L_χ, не больше числа всех различных подмножеств мощности i, полученных из наборов множества S.*

3. $N_i(L_\chi) = C_n^{n-i} - \sum\limits_{j=0}^{n-l_k-1} C_{n-a_{j+1}}^{n-j-i}$, *где*

$$a_j = (\Gamma_n^{n-l_k}(\widetilde{m}_{k-1} + m_k))_j, \quad j = 1, \ldots, n - l_k, \ 0 \leqslant i \leqslant l_k.$$

Следствие 1. *Для произвольной х. п. χ число различных элементов, необходимых для построения уплотненного множества с х. п. χ, не больше числа элементов, необходимых для построения произвольного м. п. н. н. с той же х. п.*

Данное следствие сразу же получается из теоремы 2, если учесть, что интересующее нас число использованных при построении м. п. н. н. элементов совпадает с числом всех одноэлементных подмножеств этих наборов.

Указанное в следствии 1 свойство безызбыточности или экономичности уплотненных множеств относительно числа использованных при их построении элементов является некоторым объяснением к утверждению теоремы 2.

Отметим, что система L_Γ, при $k=1$, впервые построена Макалеем [156], им же доказана экстремальность L_χ для $i = l+1$. Обобщение теоремы Макалея для небинарного случая и произвольного i получено в [150]. Теорема 2. была сформулирована и доказана автором в [79], анонсирована в [78, 85], независимо от результатов [150, 156].

3. Опишем решение второй комбинаторной задачи.

Пусть $\{2^n\}$—множество всех двоичных чисел от 0 до $2^{n+1}-1$, а $\omega : \{2^n\} \to R_n$—взаимооднозначное отображение $\{2^n\}$ на R_n такое, что

$$\forall \alpha (\alpha \in \{2^n\} \& \omega(\alpha) = A \to A = \{i | (\alpha)_i = 0\},$$

где $(\alpha)_i$—цифра в i-ом разряде α, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом старшим разрядом будем считать первый слева.

Через ω^{-1} обозначим отображение, обратное к ω, а через $c(\alpha)$ и $\overline{c}(\alpha)$—число „1“, соответственно „0“, в записи двоичного числа α. На множестве R_n введем следующее отношение линейной упорядоченности $\underset{2}{\prec}$:

$$\forall AB (A, B \in R_n \to (A \underset{2}{\prec} B \leftrightarrow \omega^{-1}(A) < \omega^{-1}(B)).$$

Через $\underset{2}{\succ}$ обозначим противоположное к $\underset{2}{\prec}$ отношение.

Последовательность Δ_n-наборов $A_1, \ldots, A_m$ назовем *+2-уплотненной,* если

$$\forall j (j \in I_{m-1} \to A_j \underset{2}{\prec} A_{j+1} \& \neg \exists A (A \in R_n \& A_j \underset{2}{\prec} A \underset{2}{\prec} A_{j+1}).$$

Аналогично определяется —2-уплотненность.

Для произвольной х. д. $\eta=(n, m)$ *уплотненным множеством* E_η с х. д. η назовем множество Δ_n-наборов $\{F(2^{n+1}-1), F(2^{n+1}-2),\ldots$ $\ldots, F(2^{n+1}-m)\}$, где $F(j)=\omega(\beta_j)$, β_j—двоичная запись j, при $j=0, 1, \ldots$ $\ldots, 2^{n+1}-1$.

Справедлива следующая

Теорема 3. (о минимальном числе подмножеств).

1. *Для произвольной х. д.* $\eta=(n, m)$ *число* $i^*_\eta=\min\limits_i(0\leqslant i\leqslant n\ \&$ $\&\exists S(S\in K_\eta \& N_i(S)<C^i_n))$ *существует;*

2. $\forall S(S\in K_\eta\to N^*_{i\eta}(E_\eta)\leqslant N^*_{i\eta}(S))$;

3. $N_i(E_\eta)=C^i_n-\sum\limits_{j=0}^{n-i-1} C^{n-i-j}_{n-a_{j+1}}$, *где* $a_j=(\omega(\alpha^i))_j$, $1\leqslant j\leqslant n-i$, $0\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant\alpha^i\leqslant\alpha^*$, $\neg\exists\alpha(\alpha>\alpha^i\&c(\alpha)=i)$ *и* α^**-двоичная запись числа* $m-1$;

4. *Если* $\sum\limits_{j=1}^{p} 2^{n-j}\leqslant m-1<\sum\limits_{j=1}^{p+1} 2^{n-j}$, *при* $p=0, 1, \ldots, n-1$, $\sum\limits_{j=1}^{0} 2^{n-j}=0$, *то* $i^*_\eta=p+1$.

Для доказательства теоремы 3 и обоснования алгоритмов построения нижних оценок длин минимальных тестов § 3 нам потребуются нижеследующие алгоритм и леммы из [79], которые приводятся здесь без доказательств.

4.1. Алгоритм Γ^k_n последовательного порождения $+1$-уплотненной последовательности Δ^k_n-наборов, при $0\leqslant k\leqslant n$, формулируется следующим образом.

I. Если $k=0$, то $\Gamma^0_n(1)$, по определению, есть пустой набор и алгоритм заканчивает работу.

II. Пусть $0<k\leqslant n$. Тогда:

1. Полагаем $\Gamma^k_n(1)=I_k$;

2. Пусть $\Gamma^k_n(i)$—Δ^k_n-набор, уже порожденный алгоритмом Γ^k_n на i-ом шаге. Тогда $\Gamma^k_n(i+1)$ строится таким образом, что:

а) если $\Gamma^k_n(i)\neg_1\{1+n-k, \ldots, n\}$, то

$$\exists q\forall xy(1\leqslant q\leqslant k\ \&\ 1\leqslant x\leqslant q\ \&\ q<y\leqslant k\to(\Gamma^k_n(i))_x<$$
$$<x+n-k\ \&\ (\Gamma^k_n(i))_y=y+n-k).$$

Тогда полагаем $\Gamma^k_n(i+1)=\{(\Gamma^k_n(i))_1, \ldots, (\Gamma^k_n(i))_{q-1}, (\Gamma^k_n(i))_q+1$ $(\Gamma^k_n(i))_q+2, \ldots, (\Gamma^k_n(i))_q+k+q+1\}$;

б) если $\Gamma^k_n(i)=\{1+n-k, \ldots, n\}$, то алгоритм заканчивает работу и $i=C^k_n$.

4.2. Лемма 1. *Последовательность* Δ^k_n*-наборов* $A_1, \ldots, A_m$, *где* $0<k<n$, $A_1\neg_1 A_2\neg_1\ldots\neg_1 A_m$ $+1$*-уплотненная тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\forall p\exists q\forall yzu(1\leqslant p\leqslant m-1\&q<y\leqslant k\ \&\ 1\leqslant z<q\leqslant u\leqslant k\to(A_p)_y=$$
$$=y+n-k\ \&\ (A_p)_z=(A_{p+1})_z\ \&\ (A_{p+1})_u=(A_p)_q+u-q+1). \qquad (1)$$

Лемма 2. *Если* $\mathbf{B}=B_1, \ldots, B_r$ k_2-*продолжение произвольной* $+1$-*уплотненной последовательности* $\Delta_n^{k_1}$-*наборов* $U=A_1, \ldots, A_m$, *где* $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$, *то, при* $r \neq 0$, *можно указать число* s *такое, что* $\forall x(0 \leqslant x \leqslant s \leqslant k_1 \to (A_m)_x \leqslant x+n-k_2 \,\&\, (A_m)_{s+1} > s+1+n-k_2)$, где $(A_m)_{k_1+1}=\infty$ и $B_r=\{(A_m)_1, \ldots, (A_m)_s, s+1+n-k_2, s+2+n-k_2, \ldots, n\}$.

Пусть $\mathbf{B}$ k_2-продолжение $+1$-уплотненной последовательности $U=\Gamma_n^{k_1}(m_1), \Gamma_n^{k_1}(m_1+1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m_2')$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2' \leqslant C_n^{k_1}$.

Поскольку последовательность $\mathbf{B}$ будет также $+1$-уплотненной, то последовательности U и $\mathbf{B}$ однозначно определяются параметрами соответственно k_1, m_1, m_1' и k_2, k_1, m_1, m_1'. Поэтому число наборов в k_2-продолжении последовательности U, в частном случае, когда U — $+1$-уплотненная последовательность, может быть задано посредством некоторой функции $\theta(k_2, k_1, m_1, m_1')$.

Лемма 3. $m=\theta(k, k, 1, m)=C_n^k-\sum\limits_{j=0}^{k-1} C_{n-a_{j+1}}^{k-j}$, *где* $0 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^k$, $a_j=(\Gamma_n^{k_1}(m))_j$, *при* $j=1, \ldots, k$.

Лемма 4. $\theta(k_2, k_1, 1, m)=C_n^{k_2}-\sum\limits_{j=0}^{k_1-1} C_{n-a_{j+1}}^{k_2-j}$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}$, $a_j=(\Gamma_n^{k_1}(m))_j$, $j=1, \ldots, k$.

Лемма 5. *Число всех различных* Δ_n^i-*поднаборов, построенных из* Δ_n^l-*наборов множества* $\{L_n^l(1), \ldots, L_n^l(m)\}$, *где* $0 \leqslant i \leqslant l \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^l$, *не больше числа всех различных* Δ_n^i-*поднаборов, построенных из* Δ_n^l-*наборов произвольного множества, состоящего из* m *различных* Δ_n^l-*наборов.*

Лемма 5 по существу совпадает с теоремой Макалея [156]. Она была получена также Краскалом (1950) и Катоной (1960). Доказательство леммы независимо получено автором [78] и существенно отлично от [150].

Непосредственно из определения Δ_n-поднаборов и Δ_n-наднаборов получаем следующую лемму.

Лемма 6. *Для произвольных* Δ_n-*наборов* A *и* B, *если* A (*собственный*) $\Delta_n^{|A|}$-*поднабор* B, *то* $I_n \setminus A$ (*собственный*) $\Delta_n^{n-|A|}$-*наднабор* $I_n \setminus B$, *и, наоборот, если* A (*собственный*) $\Delta_n^{|A|}$-*наднабор* B, *то* $I_n \setminus A$ — (*собственный*) $\Delta_n^{n-|A|}$-поднабор $I_n \setminus B$.

Следствие 1.6. *Если* $S=\{A_1, \ldots, A_m\}$ — *произвольное множество* Δ_n-*наборов и* $S'=\{I_n \setminus A_1, \ldots, I_n \setminus A_m\}$, *то для произвольного* k, $0 \leqslant k \leqslant n$ *число всех различных* Δ_n^k-*поднаборов наборов из* S *равно числу всех различных* Δ_n^{n-k}-*наднаборов наборов из* S'.

Из следствия 1.6 следует, что для доказательства леммы 5 достаточно доказать следующую лемму 7.

Лемма 7. (о минимальном числе наднаборов). *Число всех различных* $\Delta_n^{k_2}$-*наднаборов, построенных из* $\Delta_n^{k_1}$-*наборов множества*

$\{\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)\}$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_n^{k_1}$, *не больше числа всех различных* $\Delta_n^{k_2}$*-наднаборов, построенных из* $\Delta_n^{k_1}$*-наборов произвольного множества, состоящего из* m *различных* $\Delta_n^{k_1}$*-наборов.*

Из [79] нам потребуется также

Лемма 8. *Если последовательность* $B_1, \ldots, B_r$ *является* k_2*-продолжением* $\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, *то* $\forall j B(1 \leqslant j \leqslant m \,\&\, B \in R_n^{k_2} \setminus \{B_1, \ldots, B_r\} \to \Gamma_n^{k_1}(j) \not\subseteq B)$.

Следствие 1.8. *Множество всех* $\Delta_n^{k_2}$*-наднаборов наборов последовательности* $\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)$, *где* $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant C_m^{k_1}$, *совпадает с множеством всех наборов* k_2*-продолжения* $\Gamma_n^{k_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{k_1}(m)$.

Лемма 9. *Если* S*—произвольное уплотненное множество с х. п.* $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$, *то множество всех* $\Delta_n^{l_k}$*-поднаборов наборов из* S *совпадает с множеством* $\{L_n^{l_k}(1), \ldots, L_n^{l_k}(t_{l_k})\}$.

5. Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 3.

Пусть K_η и i_η^* определены так, как в § 1, α^* —n-разрядный двоичный код числа $m-1$, а $F_\eta = \{A | I_n \setminus A \in E_\eta\}$. Легко видеть, что $F_\eta = \{F(0), F(1), \ldots, F(m-1)\}$, где $F(i) = \omega(\beta_i)$, а β_i-двоичная запись i, при $i = 0, 1, \ldots, 2^{n+1}-1$. Из следствия 1.6 получаем, что E_η и F_η взаимозаменяемы в утверждениях о подмножествах заданных систем множеств. Этот факт позволяет искать доказательство теоремы 3 посредством поиска доказательства аналогичного утверждения, сформулированного для F_η. Нам потребуются следующие леммы 10—13.

Лемма 10.

$$\forall \eta \exists k m_n \ldots m_k (0 \leqslant k \leqslant n \,\&\, m_i \leqslant C_n^i, \quad i = k, \ldots, n \,\&$$

$$\& \, F_\eta = \bigcup_{i=k}^{n} \{\Gamma_n^i(1), \ldots, \Gamma_n^i(m_i)\}).$$

Доказательство. Пусть $(\alpha^*)_i = 1$, при $i = i_1, \ldots, i_r$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, $l = \max\limits_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*} c(\alpha)$. Ясно, что $n - i_1 \leqslant l \leqslant n - i_1 + 1$ и $\forall i (0 \leqslant i \leqslant l \to \exists \alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^* \,\&\, c(\alpha) = i))$. Пусть α^i при $0 \leqslant i \leqslant l$ числа такие, что $\forall i (0 \leqslant i \leqslant l \to \alpha^i \leqslant \alpha^* \,\&\, \neg \exists \alpha (\alpha > \alpha^i \,\&\, c(\alpha) = i))$; пусть также $A^i = \{\alpha | \alpha \leqslant \alpha^i \,\&\, c(\alpha) = i\}$, а $\overline{A}^{n-i}$ — последовательность Δ_n^{n-i}-наборов, полученных из A^i при кодировании ω и упорядоченных относительно отношения „$\overset{-}{1}$“.

Поскольку в A^i все двоичные числа не больше α^i и с i единицами, то $\overline{A}^{n-i}$ — $+1$-уплотнена и $\Gamma_n^{n-i}(1)$ ее первый набор, или $\overline{A}^{n-i} = \Gamma_n^{n-i}(1), \ldots, \Gamma_n^{n-i}(m_{n-i})$, $i = 0, \ldots, l$ что и требовалось доказать.

Следствие 1.10. *Х. п.* χ_η *для* F_η *имеет следующий вид*:

$$\chi_\eta = (n, n, n-1, \ldots, k, m_n, m_{n-1}, \ldots, m_k), \quad \text{где} \quad m_n = 1, \quad k = n - l,$$

$$l = \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*} c(\alpha).$$

Лемма 11. $\forall uij(k\leqslant u\leqslant n\,\&\, u\leqslant i\leqslant n\,\&\, 1\leqslant j\leqslant m_u\to V(i, \Gamma_n^u(j))\subseteq F_\eta)$, где $V(r, S)$—множество всех наднаборов наборов из S.

Доказательство. Если $1\leqslant j\leqslant m_u$, то $B_1=\{\Gamma_1^u(1), \ldots, \Gamma_n^u(j)\}\subseteq F_\eta$ (лемма 10).

Рассмотрим i-продолжение B_1. С учетом леммы 2 получаем, что $B_2=\Gamma_n^i(1), \ldots, \Gamma_n^i(p)$, где $\Gamma_n^i(p)=\{(\Gamma_n^u(j)_1, \ldots, (\Gamma_n^u(j))_s, s+1+n-i, s+2+n-i, \ldots, n\}$, а s число такое, что

$$\forall x(0\leqslant x\leqslant s\leqslant u\to(\Gamma_n^u(j))_x\leqslant x+n-i\,\&\,(\Gamma_n^u(j))_{s+1}>s+1+n-i). \qquad (1)$$

Поскольку из леммы 8 следует, что $V(i, \Gamma_n^u(j))\subseteq B_2$, то для доказательства данной леммы достаточно показать, что $B_2\subseteq F_\eta$ или $\beta=\omega^{-1}(\Gamma_n^i(p))<\omega^{-1}(\Gamma_n^u(j))=\alpha$.

Пусть $(\Gamma_n^u(j))_t=a_t$, $t=1, \ldots, u$. Тогда $\alpha=(\alpha)_1, \ldots, (\alpha)_n$, где $(\alpha)_t=0\leftrightarrow i=a_t$.

α и β до a_s разряда совпадают. Далее в α от a_s до $a_{s+1}-1$ разряда, а в β—от a_s до $s+1+n-i$ разряда, расположены 1.

Но согласно (1) $a_{s+1}>s+1+n-i$. Так как $s+1+n-i>a_s$, то получаем, что $(s+1+n-i-1)$ разряд α и β совпадают, а в $(s+1+n-i)$-ом α имеет 1, а β—0, откуда следует $\alpha>\beta$, что и требовалось доказать.

Следствие 1.11. $\forall i(k\leqslant i\leqslant n\to\overset{0}{N}_i(F_\eta)=m_i)$.

Лемма 12. $\forall ui(k\leqslant u\leqslant n\,\&\, u<i\leqslant n\to\overset{0}{N}_i(B_{m_u+1})\geqslant m_i)$,

где $B_{m_u+1}=\{\Gamma_n^u(1), \ldots, \Gamma_n^u(m_u), \Gamma_n^u(m_u+1)\}$.

Доказательство. При $m_u=C_n^u$ лемма 12 следует из леммы 11. Пусть $m_u<C_n^u$ и допустим, что лемма неверна, т. е. $\exists u_1 i_1(k\leqslant u_1\leqslant n\,\&\, u_1<i_1\leqslant n\to\overset{0}{N}_{i_1}(B_{m_{u_1}+1})<m_{i_1}(1)$. Покажем, что это допущение противоречит $\Gamma_n^{i_1}(m_{u_1}+1)\notin F_\eta$. Действительно. Из (1) следует, что $\Gamma_n^{u_1}(p+1)\in F_\eta$, где $\Gamma_n^{i_1}(p)$ есть последний набор i_1-продолжения $B_{m_{u_1}+1}$. Рассуждая аналогично лемме 11 получаем, что $\Gamma_n^{i_1}(p)=\{(\Gamma_n^{u_1}(a))_1, \ldots, (\Gamma_n^{u_1}(a))_s, s+1+n-i_1, \ldots, n\}$, где $a=m_{u_1}+1$, s—число такое, что $\forall x(0\leqslant x\leqslant s\leqslant u_1\to(\Gamma_n^{u_1}(a))_x\leqslant x+n-i_1\,\&\,(\Gamma_n^{u_1}(a))_{s+1}>s+1+n-i_1)$.

Если $(\Gamma_n^{u_1}(a))_x=x+n-i_1$ при всех x, то $p=C_n^{i_1}$ и лемма 12 верна. Пусть $(\Gamma_n^{u_1}(a))_s<x+n-i_1$. Тогда $\Gamma_n^{u_1}(p+1)=\{(\Gamma_n^{u_1}(a))_1, \ldots, (\Gamma_n^{u_1}(a))_{s-1}, (\Gamma_n^{u_1}(a))_s+1, (\Gamma_n^{u_1}(a))_s+2, \ldots, \Gamma_n^{u_1}(a))_s+i_1-s\}$. Так же как и в лемме 11, нетрудно убедиться, что $\omega^{-1}(\Gamma_n^{u_1}(a))\leqslant\omega^{-1}(\Gamma_n^{u_1}(p+1))$. Так как $\omega^{-1}(\Gamma_n^{u_1}(p+1))\in F_\eta$, то и $\omega^{-1}(\Gamma_n^{u_1}(a))\in F_\eta$, что противоречит конструкции F_η. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. $\forall uij(0\leqslant u<k\,\&\, 1\leqslant j\leqslant C_n^u\,\&\, k\leqslant i\leqslant n\to\overset{0}{N}_i(\Gamma_n^u(j))\geqslant m_i)$.

Доказательство. Так как $u<k$, то из леммы 10 следует, что $\Gamma_n^u(j)\notin F_\eta$. Поскольку $\overset{0}{N}_i(\Gamma_n^{k-1}(1))\leqslant\overset{0}{N}_i(\Gamma_n^u(j))$, при $u<k$, то данную лемму достаточно доказать для $\overset{0}{N}_i(A)$, при $A=\Gamma_n^{k-1}(1)$.

Допустим, что $\exists r(k \leqslant r \leqslant n \,\&\, \overset{0}{N}_r(A) < m_r)$ (1).

Тогда $\forall s(k \leqslant s < r \to \overset{0}{N}_s(A) < m_s)$ (2), так как согласно следствию 1.11 $m_s = \overset{0}{N}_s(F_\eta) = \overset{0}{N}_s(\Gamma_n^s(1), \ldots, \Gamma_n^s(m_s))$ и если (2) неверно, то $\Gamma_n^s(1), \ldots, \Gamma_n^s(m_s)$ было бы начальным отрезком s-продолжения A, что с учетом леммы 12 противоречило бы (1). При $s=k$ из (2) получаем, что $\overset{0}{N}_k(A) < m_k$ (3). Пусть последним набором k-продолжения A будет набор $\Gamma_n^k(t)$. Тогда в силу (3) и леммы 10 $\Gamma_n^k(t+1) \in F_\eta$. Покажем, что $\alpha = \omega^{-1}(\Gamma_n^k(t+1)) > \omega^{-1}(A) = \beta$, откуда из построения F_η будет следовать $A \in F_\eta$, противоречащее исходным условиям и тем самым опровергающее (1).

Так как $\Gamma_n^k(t) = \{1, 2, \ldots, k-2, k-1, k\}$, то $\Gamma_n^k(t+1) = \{1, 2, \ldots, k-2, k, k+1\}$. Соответственно α и β в старших разрядах от 1. до $k-2$ совпадают, но $\alpha_{k-1} = 0$, а $\beta_{k-1} = 1$, откуда $\beta > \alpha$. Лемма 13 доказана.

Доказательство теоремы 3.

1. При заданной х. д. $\eta = (n, m)$, где $n > 0$ и $m < 2^n$, рассмотрим множество S_η из m Δ_n-наборов, построенное таким образом, что наборы длины $i+1$ включаются в S_η только в том случае, когда все Δ_n^i-наборы уже исчерпаны. Ясно, что даже при $m = 2^n - 1$ останется один набор длины n, не включенный в S_η, и $N_n(S_\eta) < 1$. Следовательно $\{S | S \in K_\eta \,\&\, \exists i(0 \leqslant i \leqslant m) N_i(S) < C_n^i\} \neq \varnothing$, что и доказывает существование i_η^*.

2. Покажем, что $\forall S(S \in K_\eta \to \overset{0}{N}_{i_\eta}(F_\eta) \leqslant \overset{0}{N}_{i_\eta}(S))$ (1), где $i_\eta = n - i_\eta^*$. Допустим, что (1) неверно, т. е. $\exists S(S \in K_\eta \,\&\, \overset{0}{N}_{i_\eta}(S) < N_{i_\eta}(F_\eta))$ (2), и пусть $\chi_s = (n_1, l_1, l_2, \ldots, l_p, r_1, \ldots, r_p)$ — х. п. S, $l_1 > l_2 > \ldots > l_p$.

Если $l_p < k$, где k — наименьшая длина наборов F_η, то $\exists j(1 \leqslant j \leqslant C_n^{l_p} \,\&\, \Gamma_n^{l_p}(j) \in S \,\&\, \Gamma_n^{l_p}(j) \notin F_\eta)$. Поскольку $\forall i(k \leqslant i \leqslant n \to \overset{0}{N}_i(S) \geqslant \overset{0}{N}_i(\Gamma_n^{l_p}(j)) \geqslant \overset{0}{N}_i(\Gamma_n^{k-1}(1))$, а согласно лемме 13, $\overset{0}{N}_i(\Gamma_n^{k-1}(1)) \geqslant m_i$, то при $i = i_\eta$ приходим к противоречию с (2). Поэтому (2) возможно только при $l_p \geqslant k$.

Из (2) следует, что $\forall i(i_\eta > i \geqslant l_p \to \overset{0}{N}_i(S) \leqslant \overset{0}{N}_i(F_\eta))$ (3).

Действительно, пусть (3) неверно при некотором i^0, т. е. $\overset{0}{N}_{i^0}(S) > \overset{0}{N}_{i_0}(F_\eta)$. Тогда, с учетом лемм 7 и 12, получаем, что $\overset{0}{N}_{i_\eta}(S) \geqslant \overset{0}{N}_{i_\eta}(\{\Gamma_n^{i^0}(1), \ldots, \Gamma_n^{i^0}(m_{i^0}), \Gamma_n^{i^0}(m_{i^0}+1)\}) \geqslant \overset{0}{N}_{i_\eta}(F_\eta)$, что противоречит (2). Из (2), (3), определения i_η и следствия 1.11 получаем, что $\sum_{i=l_p}^{n} N_i(S) < \sum_{i=l_p}^{n} m_i \leqslant \sum_{i=k}^{n} m_i = m$ (4).

Но $\sum_{i=l_p}^{n} N_i(S) \geqslant \sum_{i=1}^{p} r_i = m$, что противоречит (4).

Следовательно, (1) верно, откуда, с учетом следствия 1.6 получаем утверждение п. 2 теоремы 3.

3. С учетом следствия 1.11, лемм 10 и 3 получаем, что

$\forall i(k \leqslant i \leqslant n \to \overset{0}{N}_i(F_\eta) = m_i = C_n^i - \sum_{j=0}^{i-1} C_{n-a_j+1}^{i-j}$, где $a_j = (\Gamma_n^i(m_i))_j$, при $j = 1, \ldots, i$. В свою очередь $\Gamma_n^i(m_i) = \omega(\alpha^{n-i})$, где $0 \leqslant \alpha^{n-i} \leqslant \alpha^*$ и $\neg \exists \alpha(\alpha > \alpha^{n-i}$ & & $c(\alpha) = n - i)$, что с учетом равенства $\overset{0}{N}_i(F_\eta) = N_{n-i}(E_\eta)$ дает утверждение п. 3 теоремы 3.

4. Из определения i_η, п. 2 теоремы 3 и следствия 1.11 получаем, что $i_\eta = \max_i (k \leqslant i \leqslant n \,\&\, m_i < C_n^i \,\&\, m_{i+1} = C_n^{i+1})$. Пусть α^{n-i}—определенные в п. 3 теоремы числа, $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{t^*}$, $0 \leqslant t^* \leqslant n-k$, имеют вид: $\forall t(0 \leqslant t \leqslant t^* \to (\alpha^t)_j = 1 \leftrightarrow j \in \{1, 2, \ldots, t\})$, а α^{t^*}—наибольшее число этого типа. Поскольку α^t является двоичной записью C_n^{n-t}-го Δ_n^{n-t}-набора в упорядочении Γ_n^{n-t}, то легко видеть, что $m_{n-t} = C_n^{n-t}$, при $0 \leqslant t \leqslant t^*$, и $m_{n-t^*-1} < C_n^{n-t^*-1} = C_n^{t^*+1}$, т. е. $i_\eta = n - t^* - 1$ или $i_\eta^* = t^* + 1$. Поскольку $\alpha^{t^*} < \alpha^*$, а $\alpha^{t^*+1} > \alpha^*$, то $t^* + 1$ можно найти, сравнивая $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots$ с α^*, или, что проще, суммы $0, 2^{n-1}, 2^{n-1} + 2^{n-2}, \ldots$ с $m-1$. Число слагаемых наименьшей из этих сумм, превышающей $m-1$, дает значение $t^* + 1 = i_\eta^*$. Теорема 3 доказана.

§ 3. Нижние оценки длин минимальных тестов, связь с параметрами проблем расшифровки описаний и алгоритмы построения

Рассмотрим процедуры вычисления нижних оценок длины минимального теста i_χ^* и i_η^*, определенных в § 1.

1. Пусть $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ —произвольная х. п., отличная от $(n, n, 1)$.

Как показано в [77], по произвольной х. п. $\chi = (n, l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_k)$ можно предсказать существование тестов длин $l_j + 1$, $j = 1, \ldots, k$, для таблиц с х. п. χ и в общем случае по х. п. χ невозможно отличить таблицу с х. п. χ и длиной минимального теста равной $l_k + 1$, от таблицы с х. п. χ и длиной этого теста меньшей $l_k + 1$.

Алгоритм построения нижней оценки длины минимального теста для таблиц с х. п. χ имеет следующий вид.

1.1. Находим набор $\Gamma_n^{n-l_k}(t_{l_k})$. Для этой цели проводим следующие построения:

а) Посредством алгоритма $\Gamma_n^{n-l_1}$, описанного в § 2, последовательно в лексикографическом порядке получаем наборы $\Gamma_n^{n-l_1}(1), \ldots, \Gamma_n^{n-l_1}(t_{l_1})$.

б) Пусть набор $\Gamma_n^{n-l_j}(t_{l_j})$ уже получен, $j = 1, \ldots, k-1$. Находим набор $\Gamma_n^{n-l_{j+1}}(\theta(n - l_{j+1}, n - l_j, 1, t_{l_j}))$. Из леммы 2 следует, что указанный набор равен набору $\{(\Gamma_n^{n-l_j}(t_{l_j}))_1, \ldots, (\Gamma_n^{n-l_j}(t_{l_j}))_{s_j}, s_j + 1 + l_{j+1}, \ldots, n\}$, где s_j находится из условия $\forall x(0 \leqslant x \leqslant s_j \leqslant n - l_j \to (\Gamma_n^{n-l_j}(t_{l_j}))_x \leqslant x + l_{j+1} \,\&\, (\Gamma_n^{n-l_j}(t_{l_j}))_{s_j+1} > s_j + 1 + l_{j+1})$.

Посредством алгоритма Γ^{n-l_j+1} получаем наборы

$$\Gamma_n^{n-l_j+1}(\theta(n-l_{j+1}),\ n-l_j,\ 1,\ t_{l_j})+1),\ \ldots,\ \Gamma_n^{n-l_j+1}(t_{l_{j+1}}).$$

1.2. Для построения i_χ^* производим следующие вычисления. Находим число $N_i(L_\chi)$ всех Δ_n^i-поднаборов наборов из L_χ, где $0\leqslant i\leqslant l_k$.

Из леммы 9 следует, что

$$N_i(L_\chi)=N_i(\{L_n^{l_k}(1),\ \ldots,\ L_n^{l_k}(t_{l_k})\}),$$

откуда, с учетом следствий 1.8, 1.6 и леммы 4 получаем:

$$N_i(L_\chi)=C_n^{n-1}-\sum_{j=0}^{n-l_k-1} C_{n-a_{j+1}}^{n-j-i}, \tag{1}$$

где $a_j=(\Gamma_n^{n-l_k}(t_{l_k}))_j$, $j=1,\ldots,n-l_k$, $0\leqslant i\leqslant l_k$.

Заметим, что равенство (1) справедливо также при $l_k<i\leqslant n$.

1.3. Сравнивая C_n^i с $N_i(L_\chi)$, при $0\leqslant i\leqslant l_k$, находим наименьшее значение i, при котором $N_i(L_\chi)<C_n^i$. Оно и будет значением i_χ^*.

2. Алгоритм построения оценки i_η^* непосредственно следует из теоремы 3.

Пусть $\eta=(n,m)$—х. п. таблицы T' типа η, или $m=|S'|<2^n$, где S'—множество всех м. н. н. пар векторов из классов $K_1,\ldots,K_r$, $\bigcup_{i=1}^{r}K_i=T'$, $K_i\bigcap_{i\neq j}K_j=\varnothing$, $i,j=1,\ldots,r$.

Последовательно сравнивая суммы $0,\ 2^{n-1},\ 2^{n-1}+2^{n-2},\ldots$ с $m-1$, выделяем наименьшую из них, превышающую $m-1$. Число слагаемых этой суммы и будет равно i_η^*.

Заметим, что алгоритм построения оценки $i_{\eta(\xi)}^*$ при априори заданном ξ совпадает с предыдущим, примененным к $\eta=(n,\ m_\xi)$.

3.1. Возникает естественный вопрос о близости оценок i_χ^* и i_η^* к длине i^* минимального теста заданного разбиения $K_1,\ldots,K_r$.

Можно полагать, что одним из критериев этой близости является возможность построения какой-либо таблицы с длиной минимального теста, равного i_χ^* или i_η^*. Положительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 4. *Для произвольного S, $S\subseteq R_n/\{I_n\}$ можно построить ПМ (M_0 M_1) такую, что S является множеством недопустимых наборов для пар n-мерных векторов из M_0 и M_1.*

Доказательство. Пусть $S\subseteq R_n\setminus\{I_n\}$ и $S=\{S_1,\ldots,S_m\}$. В множество M_0 включим произвольный булев вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, а в M_1—m векторов $\beta^1,\ldots,\beta^m$, где

$$(\beta^i)_j=\begin{cases}(\alpha)_j, & \text{при } j\in S_i,\\ (\bar{\alpha})_j, & \text{при } j\notin S_i,\end{cases}$$

$1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, $(\alpha)_j$—j-ая компонента α, а $(\bar{\alpha})_j$—обратная к $(\alpha)_j$.

Ясно, что S будет множеством недопустимых наборов для

(M_0, M_1). В частности, если $S=L_\chi$ или $S=E_\eta$, длина минимального теста для S будет равна i^*_χ или i^*_η, соответственно.

Следовательно, по вышеуказанному критерию близость к i^* оценок i^*_χ и i^*_η приемлема.

3.2. Усилив критерий близости оценок к i^*, дополнительно потребовав возможности построения таблицы с длиной минимального теста, равной полученной оценке, и с х. п. $\xi=(n, n_1, \ldots, n_r)$, совпадающей с исходной, можно показать, что такое построение не всегда возможно.

Опровергающим примером для случая х. п. χ может служить таблица $\begin{matrix}0000\\0011\\1100\end{matrix}$, указанная О. А. Саркисян. Действительно, множеством м. н. н. этой таблицы является $S=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, х. п. $\chi=(4, 2, 2)$, $L_\chi=\{\{3, 4\}, \{2, 4\}\}$ и $i^*_\chi=1$; однако построить таблицу из трех различных векторов, попарно не совпадающих хотя бы по одной из координат, невозможно.

Для случаев i^*_η и $i^*_{\eta(\xi)}$ аналогичный вопрос в общем случае остается открытым. А именно, вопрос о том, можно ли для произвольной таблицы T' с х. п. $\xi=(n, n_1, \ldots, n_r)$ и нижней оценкой длины минимального теста $i^*_\eta(i_{\eta(\xi)})$ построить таблицу T_ξ с той же х. п. ξ и длиной минимального теста $i^*_\eta(i^*_{\eta(\xi)})$.

Для случая $\xi=(n, 1, n_2)$, хотя и частном, но представляющем интерес при оценке ранее определенных нами длин минимальных тестов $l(\rho, u, y)$ и $l'(\rho, u)$, значение i^*_η получается для множества наборов E_η, при $\eta=(n, m)$ и $m=m_\xi=n_2$. В то же время из доказательства предыдущей теоремы видно, как построить таблицу с х. п $\xi=(n,1,n_2)$ и множеством недопустимых наборов E_η. Следовательно, при этом ξ оценки i^*_η и $i^*_{\eta(\xi)}$ являются точными в определенном выше смысле. Этот вывод позволяет построить график зависимости i^*_η от значения n_2 при $\xi=(n, 1, n_2)$, и при известном n_2 оценить $l'(\rho, u)$, а через нее и сложность исследуемой ПРО (см. также п. 6). В частности, из него следует, что ТАВТ$_n$ в форме ПРО, определенная в § 1.2, является π-переборной, поскольку для нее $\xi=(n, 1, n_2)$, $n_2=|T'|-1=2^n-1$ и потому $i^*_\eta=n$.

Отметим, что определенную информацию о значимости оценок i^*_η может дать их сравнение с аналогичными оценками, вычисленными другими методами. В частности, представляет интерес сравнение i^*_η, при $|K_i|=1$, $i=1, \ldots, r$, с оценками из [51].

4. Исходная информация о таблице T' во многих случаях может быть беднее, чем х. п. $\xi=(n, n_1, \ldots, n_r)$. Например, могут быть заданы лишь параметры n, $k=|T'|$ и r. Тогда возникает задача оценки длины минимальных тестов для конкретно заданных исходных данных. В частности, при известных параметрах n, k и r можно рас-

смотреть задачу построения х. п. $\xi'=(n, n'_1, \ldots, n'_r)$ такой, $\sum_{i=1}^{r} n'_i=k$ и $i^*_{\eta(\xi')} \leqslant i^*_{\eta(\xi)}$, где $\xi=(n, n_1 \ldots, n_r)$, $\sum_{i=1}^{r} n_i=k$—произвольная х. п., а $i^*_{\eta(\xi)}$—вычисляется на основе $\eta(\xi)=(n, m_\xi)$. При этом, поскольку из п. 4 теоремы 3 следует, что чем меньше m, тем меньше i^*_η, то достижение $i^*_{\eta(\xi')}$ можно связать с минимизацией m_ξ при всевозможных разбиениях k на r слагаемых.

5. В § 1 вопрос построения нижней оценки π-сложности ПРО был связан с вычислением $l^*(T', \rho)=\max_{u \in U} l'(\rho, u)$, где $l'(\rho, u)=\min_{y \in \rho(u)} l(\rho, u, y)$, а $l(\rho, u, y)$—длина минимального теста таблицы из двух классов: $\{y\}$ и $\overline{\rho}(u)$, $y \in \rho(u)$. Из определения $l^*(T', \rho)$ следует, что вывод о π-переборной сложности ПРО или ее π-неразрешимости можно сделать, если при некотором $u \in U$, $l'(\rho, u) \geqslant |M_u|$. В свою очередь для оценки $l'(\rho, u)$ посредством i^*_η необходимо знать $|\overline{\rho}(u)|$, что, как правило, практически неосуществимо. Более реально вычисление $|T'_u|=|\rho(u)|+|\overline{\rho}(u)|$. В этом случае, рассматривая $|\rho(u)|=x$ как параметр, можно построить функцию i^*_η, где $\eta=(|M_u|, |T'_u|-x)$, с помощью которой попробовать оценить $l'(\rho, u)$.

Отметим, что вывод о высокой π-сложности ПРО на основе i^*_η возможен только для таблиц T'_u большой мощности. Действительно, из алгоритма вычисления i^*_η следует, что еще при $|T'_u|=2^{n-1}$ и $|\rho(u)|=1$ длина минимального теста оценивается снизу $i^*_\eta=1$, и только при $|T'_u|$, близкой к 2^n, оценка i^*_η приближается к n.

Указанная специфика i^*_η затрудняет использование i^*_η при оценке сложности, в частности, ПСГ^{ш}. Так, если считать полустепень исходов графа игры постоянной и равной b, то при глубине дерева $2t$ значение $n=|M_{P_0}|$ для начальной позиции P_0 можно оценить величиной $\frac{b^{2t+1}-1}{b-1}$, а число P_0-стратегий глубины не большей $2t$—величиной $2t \cdot b^{\frac{b^t-1}{b-1}}$. Из этих оценок видно, что n имеет порядок b^{2t}, а $|T'_{P_0}|-2^{b^t}$ или $2^{\sqrt{n}}$, что много меньше 2^{n-1}.

6.1. В § 3.1 были отмечены некоторые ожидаемые результаты относительно изменения сложности ПРО при определенном изменении ее параметров. Полагая, что нижняя оценка π-сложности задается $l^*(T', \rho)$, которая в свою очередь оценивается величиной i^*_η таблицы с $\max_{u \in U} l'(\rho, u)$, можно по закономерности изменения i^*_η получить некоторое представление об изменениях π-сложности. Ниже в теореме 5 уточняется связь между параметрами инициально пустых ПРО—ПРО1, и нижними оценками их $\pi(\sigma)$-сложности, что при определен-

ных допущениях позволяет указать некоторые из направлений уменьшения $\pi(\sigma)$-сложностей этих проблем.

Теорема 5. *Для произвольной ПРО1* $\langle M, T', \rho, U, C_0, C_1\rangle$ *и* $u \in U$, *если* $|M|=n$, *мощности* ρ-образов $|\rho(u)|$ *и множества возможных решений* $|T'_u|$ *не зависят от* u *и равны* r *и* $\alpha|T'|$, *при* $0<\alpha\leqslant 1$, *соответственно, то* $\pi(\sigma)$-*сложность этой ПРО1 больше* $\log\dfrac{1}{1-\dfrac{\alpha|T'|-r-1}{2^n}}$.

Доказательство теоремы 5, так же как и теоремы 1, проведем только для π-сложности.

Согласно теореме 1 $\pi(\rho, F_\rho)\geqslant l^*(T', \rho)$. Оценим $l^*(T', \rho)$. Из условий данной теоремы следует, что х. п. каждой таблицы τ_u, соответствующей множеству возможных решений T'_u при входе u, равна $\xi'=(n, r, \alpha|T'|-r)$. Следовательно, совпадают и равны $\xi=(n, 1, \alpha|T'|-r)$ х. п. таблиц, требуемых при оценке $l'(\rho, u)$ и $l^*(\rho, u)$. Следовательно, $l^*(T', \rho)=l'(\rho, u)\geqslant i^*_{\tau_\eta}(\xi)$, где $i^*_{\tau_\eta}(\xi)$—нижняя оценка д. м. т. таблицы с х. п. $\eta(\xi)=(n, m_\xi)$, а m_ξ—мощность множества м. н. н. этой таблицы. Согласно п. 4 теоремы 3 $i^*_{\tau_\eta(.)}=p+1$ при условии, что

$$\sum_{j=1}^{p} 2^{n-j}\leqslant m_\xi-1<\sum_{j=1}^{p+1} 2^{n-j}. \qquad (1)$$

Для х. п. $\xi=(n, 1, \alpha|T'|-r)$, $m_\xi=\alpha|T'|-r$, поскольку $|\rho(u)|=1$. Подставив значение m_ξ в правую часть неравенства (1) несложными преобразованиями получим $\log\dfrac{1}{1-\dfrac{\alpha|T'|-r-1}{2^n}}<p+1=i^*_{\xi(\tau_\eta)}$, откуда следует утверждение теоремы.

В доказанном выше неравенстве параметр $n=|M|$ интерпретируется как мощность множества элементов описаний решений проблемы, 2^n—как мощность множества всевозможных решений при отсутствии каких-либо исходных ограничений на их допустимость, $|T'|$—при наличии таких ограничений для всех входных записей одновременно, $\alpha|T'|$—с дополнительными ограничениями для отдельных входных записей и наконец, r—как мощность эквивалентных решений при каждой входной записи.

Исходя из *предположения* о том, что упорядочение $\pi(\sigma)$-сложностей проблем типе ПРО1 изоморфно упорядочению соответствующим им оценкам теоремы 5, можно сформулировать следующее

Следствие 1.5. *При прочих фиксированных параметрах* $\pi(\sigma)$-*сложность ПРО1 уменьшается с уменьшением числа допустимых решений* $\alpha|T'|$ *или с ростом числа эквивалентных решений* r *и не возрастает с ростом числа элементарных описаний* n.

Последнее утверждение сравнительно неожиданно. Оно следует из неравенства $\alpha|T'|\geqslant r+1$ и может интерпретироваться как невоз-

растание $\pi(\sigma)$-сложности с ростом мощности описательных средств и неизменной области поиска в множестве решений.

При одновременном изменении параметров ПРО1 справедливо следующее

Следствие 2.5. *$\pi(\sigma)$-сложность ПРО1 уменьшается, если отношение недопустимых решений* $(\alpha|T'|-r-1)$ *к общему числу всех решений* 2^n *уменьшается.*

6.2. Теорема 5 совместно с принятым предположением устанавливает связь между $\pi(\sigma)$-сложностью и параметрами ПРО1.

Развивая высказанное в § 1 предположение о возможности использования в качестве нижних оценок $\pi(\sigma)$-сложностей инициально пустых ПРО длины минимальных тестов соответствующих этим проблемам таблиц, представляется правдоподобным расширение утверждения теоремы 5 с некоторыми изменениями на ПРО произвольного типа. А именно, полагая, что при переходе от некоторой инициально пустой ПРО к эквивалентной ей инициально полной, отличной от исходной только множеством входных записей, при каждой входной записи происходит лишь дополнительное сужение областей возможных решений, предлагается учесть это сужение посредством введения в оценку сложности теоремы 5 коэффициента γ, $0<\gamma\leqslant 1$, роль и место которого в оценке аналогичны α.

§ 4. К сложности расшифровки описаний в классе индуктивных выводов

1.1. В § 2.2 были выделены следующие типы алгоритмов индуктивного обобщения: индукторы (согласующие, несогласующие, абсолютизирующие) и ИВ (с обратной связью и без нее). При этом ИВ являются разновидностью АПВ, а индукторы, вообще говоря, подпрограммами ИВ, хотя они могут исследоваться и самостоятельно, описывая, в частности, процедуры одного такта работы ИВ или других АПВ.

Разновидности указанных типов ИВ охватывают многие известные классы алгоритмов, используемые при решении проблем расшифровки. Поэтому построение сложностных характеристик ПРО относительно этих классов представляет самостоятельный интерес. Рассматриваемое ниже понятие сложности расшифровки относительно ИВ может быть получено из понятия временной сложности, введенного в § 1.1, и определяется следующим образом.

Пусть даны произвольные индуктор f, ПМ v и ГПН $\varphi\in\Phi(v)$.

Тактовой сложностью v в $[f, \varphi]$-ИВ $h(t)$ назовем число

$$S_T(v, f, \varphi)=\begin{cases}\mu t(v\subseteq h(t)), & \text{если такое } t,\ t\leqslant k, \text{ существует,}\\ k+1, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где μ—оператор минимизации [38].

Объемной сложностью v в $[f, \varphi]$-ИВ назовем число

$$S_{об}(v, f, \varphi) = \begin{cases} |\varphi(a)|, \text{ при } a \leqslant k, \text{ где } a = S_T(v, f, \varphi), \\ k+1, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть даны произвольные непустые $A \subseteq T$ и $G \subseteq F$. *Объемной сложностью* A в $[G]$-ИВ назовем число

$$S^1_{об}(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} \min_{\varphi \in \Phi(v)} S_{об}(v, f, \varphi).$$

Из данных определений следует, что сложность расшифровки ПМ относительно ИВ оценивается только числом вопросов и ответов о принадлежности элементов M к компонентам ПМ, которые, можно полагать, выясняются посредством оракула. При решении ПРО1 $S_{об}(v, f, \varphi)$ оценивает вышеуказанное число вопросов и по существу является частным случаем определения временной сложности ПМ относительно АПВ. $S_T(v, f, \varphi)$ играет вспомогательную роль относительно $S_{об}(v, f, \varphi)$ и оценивает „реальное" число обращений к ГПН φ, а $S^1_{об}(A, G)$ имеет смысл π-сложности ПРО1 относительно класса ИВ. При этом, ввиду стандартности схемы ИВ, в качестве аргумента $S^1_{об}(A, G)$ указана переменная часть ИВ—индукторы.

Ниже приведен ряд сравнительных характеристик сложности расшифровки ПМ или классов ПМ относительно ИВ. В ряде случаев они справедливы не только для абс. ПМ, но и для ПМ, отличных от них. Поэтому утверждения сформулированы в общей форме, а в примечаниях к ним при необходимости указаны параметры ПРО1, для которых они верны. В целом они характеризуют начальный этап проводимых нами исследований в этом направлении.

1.2. Прежде чем перейти к точным утверждениям в заключение этого раздела перечислим некоторые факторы, влияющие на эффективность процесса индуктивного обобщения. С этой целью присмотримся к процессу формирования понятий у человека в ситуации „ученик — учитель". Нам представляется, что сравнительно быстрое формирование некоторого понятия у ученика посредством методов индуктивного обобщения может быть связано со следующими обстоятельствами.

1.2.1. Ученик может располагать другими знаниями, прямо или косвенно связанными с задуманным учителем понятием. Эти знания значительно сужают область поиска нужного понятия и тем самым облегчают его формирование. Это могут быть знания об общих ограничениях на ситуации окружающей человека среды и об общих законах протекающих в природе процессов. Эти знания, накопленные человечеством на протяжении многих веков эволюции и развития познания, в принципе, могут передаваться ученику посредством механизма биологической наследственности, отражаясь в самой структуре рецептивных и творческих способностей обучающегося. Но значительно более важную роль в процессе формирования понятий посредством индуктивного обобщения играют те знания, которые были просто сообщены ученику на предшествующих этапах обучения (с этим хорошо согласуется тот психологический факт, что человек на-

чинает пользоваться индуктивным обобщением на сравнительно поздних стадиях развития).

1.2.2. Определенное значение может иметь и то обстоятельство, что ученик и учитель обладают сходными познавательными возможностями. Если бы восприятие различных ситуаций у ученика и учителя осуществлялось посредством различных биологических механизмов, то их взаимопонимание было бы сильно затруднено. Например, классы ситуаций, которые учителю представлялись бы непересекающимися, ученик мог бы воспринять как пересекающиеся и т. д. Напротив, сходство восприятия ситуаций учеником и учителем может значительно облегчить ученику синтез требуемых понятий.

1.2.3. Для осуществления взаимопонимания между учеником и учителем очень важно, с помощью каких языковых средств происходит у каждого из них описание классов ситуаций, т. е. как записываются понятия. Если языковые средства, которыми обладают ученик и учитель, сходны и полны (т. е. позволяют описывать произвольные классы ситуаций), то ученик, зная некоторые характеристики языковых выражений, которые учитель использует в качестве описаний множеств ситуаций (например, длины этих выражений), может облегчить себе задачу индуктивного обобщения, организуя поиск описания искомого множества ситуаций только в том классе языковых выражений, которые определяются этими известными ему ограничениями. Если же языковые средства, находящиеся в распоряжении учителя и ученика, различны и к тому же неполны, между ними возможно и полное непонимание.

1.2.4. Ученику может быть дана возможность определенным образом управлять последовательностью ситуаций, которые предъявляет ему учитель. Например, он может потребовать предъявить ему какие-то конкретные ситуации и сказать, к какому классу они относятся, задать определенные вопросы об этих ситуациях и т. д. В этом случае индуктивное обобщение происходит в условиях так называемого зависимого выбора [124] или в нашем уточнении—посредством ИВ с обратной связью. Из проведенного анализа следует, что эффективность расшифровки понятий зависит как от исходных состояний „ученика“ и „учителя“, так и от типа их взаимодействия. В нашей формализации им соответствуют конкретные параметры ПРО и тип АПВ, подклассом которых являются ИВ. Определенная связь этих параметров с нижними оценками сложности ПРО относительно произвольных АПВ была получена в § 1. Результаты данного параграфа направлены к уточнению, в частности, этих связей относительно ИВ.

2. Очевидны следующие *свойства* $[f, \varphi]$-ИВ.

1. Для произвольных ПМ $v \in T$, индукторов $f_1, f_2 \in F$ и ГПН φ имеет место следующее утверждение: если $S_T(v, f_1, \varphi) = S_T(v, f_2, \varphi)$, то $S_{об}(v, f_1, \varphi) = S_{об}(v, f_2, \varphi)$. Обратное в общем случае неверно. Однако для РГПН φ оба утверждения эквивалентны.

2. $\forall v \exists f \forall \varphi (v \in T \setminus D^k \& \varphi \in \Phi(v) \to f \in F_{нс} \& S_{об}(v, f, \varphi) = k+1)$, т. е. v недостижимо в индуктивном выводе со специально выбранным несогласующим индуктором. В классе согласующих индукторов такой выбор невозможен.

3. $\forall f v \varphi (f \in F_c \& v \in T \& \varphi \in \Phi(v) \& (\varphi - \text{СРГПН}) \to S_{об}(v, f, \varphi) \leqslant |\varphi(t^*)|)$,

где $t^* = \mu_t(|\varphi(t)| > |v|)$.

В следствии к нижеследующей теореме 6 утверждается существование ПМ максимальной сложности для индуктивных выводов с произвольным согласующим абсолютизирующим индуктором. Тем самым опровергается идея об оптимальном индукторе в индуктивных выводах этого типа. Теорема справедлива для ПРО1 при $T \subseteq D^k$.

Теорема 6. *Для произвольного согласующего абсолютизирующего индуктора f и произвольной строго возрастающей ОРФ ψ можно построить РГПН φ такой, что для $[f, \varphi]$-ИВ h*

$$\forall t (t \geqslant 1 \& \psi(t) \leqslant k \to |\varphi(t)| = \psi(t) \& h(t+1) \neq h(t)).$$

Доказательство. Построим РГПН, удовлетворяющий условиям теоремы. Построение индуктивное, по параметру t.

1. Если $\psi(0) > k$, то $\varphi(t)$, при $t \geqslant 0$, полагаем равным произвольному $v \in D^k$.

Пусть $\psi(0) \leqslant k$. Выбираем произвольным образом ПМ (M_1^0, M_0^0) такую, чтобы $|M_1^0 \cup M_0^0| = \psi(0)$, и полагаем $\varphi(0) = \varkappa(M_1^0, M_0^0)$.

2. Пусть $\varphi(t)$ уже определено. Тогда $\varphi(t+1)$ определяем следующим образом.

Если $\psi(t+1) > k$, то полагаем $\varphi(t+1) = \varphi(t)$. Если же $\psi(t+1) \leqslant k$, то вводим в рассмотрение множества

$$M_1^t = \nu_1(\varphi(t)),\ M_0^t = \nu_0(\varphi(t)),\ R_1^t = \nu_1(f(\varphi(t))),\ R_0^t = \nu_0(f(\varphi(t))).$$

Ясно, что $(M_1^t, M_0^t) \subseteq (R_1^t, R_0^t)$ и $R_1^t \cup R_0^t = M$. Из множеств $R_1^t \setminus M_1^t$ и $R_0^t \setminus M_0^t$ выделим соответственно подмножества P_1^t и P_0^t таким образом, чтобы выполнялось равенство $|P_1^t \cup P_0^t| = \psi(t+1) - \psi(t)$. Выполнение этого равенства возможно, так как $\psi(t+1) \leqslant k$. Мы полагаем $\varphi(t+1) = \varkappa(M_1^t \cup P_0^t,\ M_0^t \cup P_1^t)$. Поскольку $\psi(t+1) - \psi(t) > 0$, то $P_1^t \cup P_0^t \neq \varnothing$, а потому $(M_1^t \cup P_0^t,\ M_0^t \cup P_1^t) \not\subseteq (R_1^t, R_0^t)$. Следовательно, $f(\varphi(t+1)) \neq f(\varphi(t))$.

Теорема доказана.

Следствие 1.6. $\forall f t \exists v \varphi (f \in F_c \cap \Omega \& t \in N \to v \in D^k \& \varphi \in \Phi(v) \& \varphi(t) \subseteq \varphi(t+1) \& S_T(v, f, \varphi) = S_{об}(v, f, \varphi) = k)$.

Доказательство легко получить, если в условиях теоремы выбрать $\psi(t) = t$.

В следующей теореме 7 устанавливаются некоторые общие ограничения на индуктивный вывод с регулятором, посредством которых показывается, что ни для одного из классов $F_{нс}$ и F_c не существует оптимального регулятора.

Теорема 7. 1. $\neg \exists q^* \forall q f v (q \in Q \& f \in F_{нс} \& v \in T \to q^* \in Q \& S_{об}(v, f, \varphi^*) \leqslant S_{об}(v, f, \varphi))$.

2. $\neg\exists q^{**}\forall qfv(q\in Q\&f\in F_c\&v\in T\to q^{**}\in Q\&S_{об}(v,f,\varphi^{**})\leqslant S_{об}(v,f,\varphi)$, где φ^*, φ^{**} и φ соответственно (f, q^*), (f, q^{**}) и (f, q)-порождены и согласованы с v.

Теорема 7 непосредственно следует из лемм 14 и 15.

Лемма 14. $\forall qv\exists fg(q\in Q\&v\in D^{k-1}\to f\in F_{нс}\&g\in F_c\&S_{об}(v, f)<k\&$ $\&S_{об}(v, g)<k\&S_{об}(v, f, \varphi^*)=S_{об}(v, g, \varphi_1^*)=k+1)$, где φ^* и φ_1^* соответственно (f, q) и (g, q)-порождены и согласованы с ПМ v.

Лемма 14 утверждает, что для произвольных регулятора q и абсолютной ПМ v существуют индукторы такие, что в соответствующем процессе индуктивного обобщения регулятор q не сможет выработать тех данных, посредством которых индуктор f мог бы расшифровать заданную ПМ.

Доказательство. 1. Зафиксируем произвольный регулятор q^* и произвольные ПМ $v\in D^{k-1}$ и $v^*\in D^k$. Пусть $R(v)=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, где $m=|R(v)|=2^{|v|-1}=2^{|k|-1}$.

Семейство $H=\{f_1, \ldots, f_m\}$ индукторов определим следующим образом:

1. $\forall i(1\leqslant i\leqslant m\to f_i(x_i)=v)$,
2. $\forall x(x\in T\setminus\{x_i\}\cup D^k\to f(x)=v^*)$, при $1\leqslant i\leqslant m$.

Ясно, что $\forall f(f\in H\to S_{об}(v, f)<k)$. Покажем, что

$$\exists f(f\in H\&S_{об}(v, f, \varphi^*)=k+1).$$

Для произвольного индуктора f согласно определению (f, q^*)-порожденного и согласованного с v ГПН φ^*, выполняется: $\varphi^*(0)=$ $=\varkappa(\nu_1(v)\cap\{a\}, \nu_0(v)\cap\{a\})$, где $a\in M$ и $\varphi^*(0)\in R(v)$. По определению H найдется единственный $f\in H$ такой, что $f(\varphi^*(0))=v$. Обозначим его через f^1. Тогда $\forall gf(g, f\in H\setminus\{f^1\}\to h(0)=g(\varphi^*(0))=f^*(\varphi^*(0))\neq v\&q^*(0,$ $\varphi^*(0), h(0))=\text{const})$. Обозначим $H\setminus\{f^1\}$ через H_1. Таким образом, для всех $f\in H_1$, $\varphi^*(1)$ определяется единственным образом и $\varphi^*(1)\in R(v)$. Если $\varphi^*(1)\neq\varphi^*(0)$, то в H_1 найдется индуктор f^2 такой, что в $[f^2, \varphi^*]$-ИВ h $h(0)=v^*$ и $h(1)=v$.

При этом

$$\forall f(f\in H_2\to h_f(1)=v^*),$$

где h_f—$[f, \varphi^*]$-ИВ, $H_2=H_1\setminus\{f^2\}$.

Если $\varphi^*(0)=\varphi^*(1)$, то на первом шаге используем индуктор f^1. Пусть H_i, $i>2$—подмножество H индукторов таких, что $\forall tf(t<i\&$ $\&f\in H_i\to h_f(t)=v^*)$, где h_f—$[f, \varphi^*]$-ИВ. Тогда для всех индукторов из H_i $q^*(i-1, \varphi^*(i-1), h(i-1))$ будет одинаковым, а для $\varphi^*(i)=v\cap$ $\cap q^*(i-1, \varphi^*(i-1), h(i-1))$ при условии, что $\varphi^*(i)\neq\varphi^*(i-1)$, найдется $f^{i-1}\in H_i$ такой, что выполняются утверждения $f(\varphi^*(i))=v$ и $\forall f(f\in$ $\in H_{i-1}\to h_f(i)=v^*)$, где $H_{i-1}=H_i\setminus\{f^{i-1}\}$ и h_f—$[f, \varphi^*]$-ИВ.

Если $\varphi^*(i)=\varphi^*(i-1)$, то на i-ом шаге используем индуктор f^{i-1}.

При $i=k+1$ мы получим, что

$$\forall tf(t\leqslant k\&f\in H_{k+1}\to h_f(t)=v^*).$$

При этом $|H_{k+1}| \geqslant 2^{k-1}-(k+1)>0$, при $k>0$. Таким образом, для произвольного индуктора $f \in H_{k-1}$ мы имеем $S_{об}(v, f, \varphi^*)=k+1$, где $\varphi^*-(f, q^*)$—порожденный и согласованный с v ГПН, что и требовалось доказать.

2. Зафиксируем произвольные регулятор q^* и ПМ $v \in D^{k-1}$, а также $v_1 \in D^k$ такую, что $v \subset v_1$.

Пусть $R(v) \setminus v=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $G=\{g_1, \ldots, g_n\}$—семейство индукторов, определенных следующим образом:

1. $\forall i(1 \leqslant i \leqslant n \rightarrow g_i(x_i)=v \& g_i(v)=v_1)$,

2. $\forall x(x \in T \setminus \{x_i\} \cup D^k \rightarrow g_i(x)=x)$, при $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ясно, что $\forall g(g \in G \rightarrow S_{об}(v, g)<k)$ и $|G|=2^{k-1}-1$.

Повторив далее в точности рассуждения, проведенные при доказательстве первой части леммы, для класса G получим требуемое утверждение, т. е.

$$\exists g(g \in G) \& S_{об}(v, g, \varphi_1^*)=k+1),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 15. $\forall v f \varphi \exists q^*(v \in T \& f \in F \& \varphi \in \Phi(v) \rightarrow q^* \in Q \& S_{об}(v, f, \varphi^*) \leqslant S_{об}(v, f, \varphi))$, *где* $\varphi^*-(f, q^*)$-*порожденный и согласованный с* v *ГПН.*

Лемма 15 дает точный смысл интуитивно ясному положению о том, что для произвольных заданных индуктора f, ПМ v и ГПН φ можно построить соответствующий регулятор такой, что порожденный им и согласованный с v ГПН φ^* позволит расшифровать v не хуже, чем с ГПН φ.

Доказательство. Допустим, что $\exists x(x \in T \& f(x)=v)$, так как в противном случае утверждение леммы справедливо при любом q. Пусть $x_1 \in T$, $f(x_1)=v$ и $S_{об}(v, f)=|x_1|$. Рассмотрим регулятор $q^*(t, x, y) \equiv \varkappa(\nu_1(x) \cup \nu_0(x), \varnothing)$. Очевидно, $\varphi^*(t)=x_1$ и $S_{об}(v, f, \varphi^*)=|x_1|$, в то время как $S_{об}(v, f, \varphi) \geqslant S_{об}(v, f)$.

3.1. Введенный выше критерий $S_{об}(v, f, \varphi)$ оценивает сложность расшифровки ПМ с учетом порядка вопросов к оракулу, определяемого ГПН. Представляет интерес исследование „абсолютных возможностей" индуктора f безотносительно к ГПН, в частности, оценка сложности расшифровки заданной ПМ тем минимальным числом элементов из универсального множества, которое нужно задать, чтобы f мог вычислить по ним v. Такой критерий оценки сложности заданной ПМ относительно заданного индуктора идейно близок подходу к вычислению сложности числа относительно рекурсивной функции, который развит в [48], и уточняется нами следующим образом.

Пусть нам даны произвольные ПМ v и индуктор f. *Объемной сложностью* v *относительно* f назовем число

$$S_{об}(v, f)=\begin{cases} \min\limits_{x \in T,\, v=f(x)} |x|, & \text{если такое } x \text{ существует,} \\ c+1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где c—заранее фиксированное натуральное число.

Так как всякая ПМ x может быть задана посредством указания принадлежности к $\nu_1(x)$ или $\nu_0(x)$ каждого из k элементов множества M, то с точки зрения приложений интересно рассмотреть индукторы, относительно которых объемная сложность заданных ПМ не превышает k. Поэтому в дальнейшем мы полагаем $c=k$.

Пусть заданы произвольные непустые $A\subseteq T$, $G\subseteq F$. *Объемной сложностью A относительно G* назовем число

$$S^1_{об}(A, G)=\min_{f\in G}\max_{v\in A} S_{об}(v, f).$$

По существу значение $S_{об}(A, G)$ при $A\subseteq D^k$ определяет нижнюю оценку π-сложности класса ПМ A относительно ИВ с индукторами из класса G. Данную связь $S_{об}(A, G)$ с π-сложностью можно уточнить следующим образом. Поскольку

$$\forall fv(f\in F\&v\in T\to S^1_{об}(\{v\}, f)=\min_{u\subseteq v, v\subseteq f(u)}|u|), \text{ то}$$

справедливо следующее

Свойство 4. *Для произвольных непустых $A\subseteq T$, $G_1\subseteq F_{нс}$, $G_2\subseteq F_c$ выполняются неравенство $S_{об}(A, G_1)\leqslant S^1_{об}(A, G_1)$ и равенство $S_{об}(A, G_2)=S^1_{об}(A, G_2)$.*

Указанные соотношения позволяют на основе некоторых из нижеследующих утверждений сделать определенные выводы относительно нижних оценок π-сложности ПРО1 в классе ИВ. При этом используются дополнительные условия однозначности отображения множества U в T', а также одноэлементности каждого класса ρ-приближений.

3.2. Приведем некоторые свойства индукторов, связанные с введенной мерой сложности ПМ.

Свойство 5. $\forall y(y\in T\setminus D^k\to\exists fg(f\in F_c\&g\in F_{нс}\&S_{об}(y,f)=S_{об}(y,g)=k+1))$. Пусть $f\in F_c$, $y\in T\setminus D^k$ и $A=\{x|f(x)=y\}$. Ясно, что $\forall x(x\in A\to x\subseteq y)$. Так как $y\notin D^k$, то при $k>1$ найдется хотя бы одно y^* такое, что $y^*\neq y$ и $y\subseteq y^*$.

Определив индуктор f_1 так, что

1. $\forall x(x\notin A\to f_1(x)=f(x))$,
2. $\forall x(x\in A\to f_1(x)=y^*)$,

получим, что $S_{об}(y, f_1)=k+1$. Для несогласующих индукторов утверждение доказывается аналогично.

Очевидно следующее

Свойство 6.

а) $\forall y(y\in T\to\exists f(f\in F_c\&\forall x(x\in R(y)\to f(x)=y)))$.

б) $\forall y(y\in T\to\exists g(g\in F_{нс}\&\forall x(x\in S_{\leqslant|y|}\to g(x)=y)))$.

Следствие 1. $\forall x(x\in T\to\exists fg(f\in F_c\&g\in F_{нс}\&S_{об}(x,f)=S_{об}(x,g)=0))$.

Следствие 2. $\neg\exists f^*g^*\forall fgx(f\in F_c\&g\in F_{нс}\&x\in T\to f^*\in F_c\&g^*\in F_{нс}\&(S_{об}(x, f^*)\leqslant S_{об}(x, f)\vee S_{об}(x, g^*)\leqslant S_{об}(x, g)))$.

Таким образом, в каждом из классов F_c и $F_{нс}$ не существует оптимальных индукторов.

Свойство 7. $\forall v A(R(v) \subseteq A \subseteq T \to S_{об}(A, F_c) \geqslant v)$. Действительно, для произвольного $f \in F_c$ могут иметь место две возможности. Либо $\forall y(y \in R(v) \to \exists x(x \in R(v) \& f(x) = y))$ и тогда $\forall x(x \in R(v) \to f(x) = x)$, либо $\exists y(y \in R(v) \& \forall x(x \in T \to f(x) \neq y))$.

В обоих случаях доказываемое утверждение справедливо. Справедливо также следующее

Свойство 8. $\forall r A(1 \leqslant r \leqslant k \& A \subseteq T \to (|A| > \sum_{i=0}^{r-1} 2^i C_k^i \leftrightarrow S_{об}(A, F) \geqslant r))$.

Доказательство. Обозначим для краткости левый член стоящей в консеквенте эквивалентности через α, а правый—через β.

1. Пусть имеет место α. Допустим, что $\neg\beta$. Это означает, что

$$\exists f \forall z \exists x(f \in F \& z \in A \& x \in S_{\leqslant r-1} \& f(x) = z).$$

При этом должно выполняться условие однозначности f, т. е.

$$\forall xy(x, y \in S_{\leqslant r-1} \& x = y \to f(x) = f(y)).$$

Очевидно, что указанное f возможно при условии $|S_{\leqslant r-1}| \geqslant |A|$, что противоречит предположению о справедливости α.

2. Теперь предположим, что выполняется β. Покажем, что в этом случае из $\neg\alpha$ должно следовать $\neg\beta$. Действительно, допустим $\neg\alpha$. Пусть $C = S_{\leqslant r} \cap A$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_p$ и $z_1, \ldots, z_q$ всевозможные элементы соответственно множеств $S_{\leqslant r} \setminus C$ и $A \setminus C$, упорядоченные в порядке возрастания общего числа элементов, содержащихся в каждой ПМ.

Из предположения $\neg\alpha$ следует, что $p \geqslant q$. Определим индуктор f следующим образом:

1. $\forall x(x \in C \to f(x) = x)$,
2. $\forall x_i(1 \leqslant i \leqslant q \to f(x_i) = z_i)$,
3. $\forall x(x \in T \setminus (\{x_1, \ldots, x_q\} \cup C \cup D^k) \to f(x) = z^*)$,

где z^*—произвольный элемент из D^k.

Ясно, что $S_{об}(A, f) < r$, а это противоречит β.

3.3. В условии 2 определения индуктора выделена основная особенность акта индуктивного обобщения—построение гипотезы, которая увеличивает число классифицированных объектов. При этом условие согласованности 2^1 дополнительно требует, чтобы „гипотеза" не противоречила классификации, заданной на исходном множестве объектов. Казалось бы, что согласующие индукторы должны производить расшифровку с меньшей объемной сложностью, чем несогласующие.

В нижеследующих теоремах доказывается ошибочность такого предположения. В теореме 8 указан некоторый (по существу, полный) класс согласующих индукторов, которые расшифровывают произвольную ПМ не лучше несогласующих индукторов. В то же

время возможны и такие классы ПМ, оптимальную расшифровку которых можно произвести только согласующими индукторами, и такие, для которых оптимальными оказываются, наоборот, несогласующие индукторы (теорема 9).

Теорема 8. *Если* $G=\{f|f\in F_c\&\exists z_1z_2(z_1,z_2\in T\&\nu_1(z_1)=\nu_0(z_2)\&\nu_0(z_1)=\nu_1(z_2)\&f(z_1)\neq z_1\&f(z_2)\neq z_2)\}$, то $\forall A(A\subseteq T\to S_{об}(A, F_{нс})\leqslant S_{об}(A, G))$.

Доказательство. Пусть $f\in G$, $z_1, z_2\in T$ и $\nu_1(z_1)=\nu_0(z_2)$, $\nu_0(z_1)=\nu_1(z_2)$. Ясно, что $z_1\subseteq f(z_1)$, $z_2\subseteq f(z_2)$ и $z_2\neq f(z_1)$, $z_1\neq f(z_2)$. Индуктор f^* определим следующим образом:

1. $\forall x(x\notin\{z_1, z_2\}\to f^*(x)=f(x))$,
2. $f^*(z_1)=f(z_2)$ и $f^*(z_2)=f(z_1)$.

Очевидно, что при $k\geqslant 1$ такое построение возможно и $f^*\in F_{нс}$. Ясно также, что для произвольного $A\subseteq T$, $S_{об}(A, f^*)=S_{об}(A, f)$. Построив для каждого $f\in G$ вышеуказанным способом индуктор $f^*\in F_{нс}$ получим множество G^* такое, что $G^*\subseteq F_{нс}$ и $S_{об}(A, G)=S_{об}(A, G^*)\leqslant S_{об}(A, F_{нс})$, что и требовалось доказать.

Теорема 9. $\exists A_1A_2(A_1, A_2\subseteq T\&S_{об}(A, F_{нс})<S_{об}(A_1, F_c)\&$
$\&S_{об}(A_2, F_{нс})>S_{об}(A_2, F_c))$.

Доказательство. 1. Для произвольной ПМ v введем обозначение

$$R_p(v)=\{x|x\subseteq v\&|x|\leqslant p\},\ \text{при}\ 0\leqslant p\leqslant|v|.$$

Легко видеть, что $|R_p(v)|=\sum\limits_{i=0}^{p} C^i_{|v|}$.

Пусть v—произвольная абсолютная ПМ и $A=R_{|v|}(v)$. Тогда из свойства 3 следует, что $S_{об}(A, F_c)\geqslant k$. Покажем, что $S_{об}(A, F_{нс})<k$, откуда будет следовать первая часть теоремы.

Действительно, согласно свойству 4 имеем, что

$$|A|\leqslant\sum_{i=0}^{k-1} 2^iC^i_k\to S_{об}(A, F)<k.$$

Но разность $\sum\limits_{i=0}^{k-1} 2^iC^i_k-|A|=\sum\limits_{i=0}^{k-1} 2^iC^i_k-\sum\limits_{i=0}^{k-1} C^i_k-1=\sum\limits_{i=0}^{k-1} C^i_k(2^i-1)-1$ при $k>1$ всегда неотрицательна, а потому выполняется неравенство $S_{об}(A, F)\leqslant k-1$.

Так как $S_{об}(A, F_c)\geqslant k$, то полученное выше неравенство равносильно неравенству $S_{об}(A, F_{нс})\leqslant k-1$, что и требовалось доказать.

2. Покажем, что $S_{об}(T, F_c)<S_{об}(T, F_{нс})$. Пусть f—согласующий индуктор такой, что $\forall x(x\in T\to f(x)=x)$. Покажем, что $S_{об}(T, f)<S_{об}(T, F\setminus\{f\})$. Действительно, $S_{об}(T, f)=k$. В то же время, для произвольного $f^*\in F$, если $f^*\neq f$, то найдется $x\in T$ такой, что $f^*(x)\neq x$. Тогда можно указать элементы $x_1, x_2, \ldots, x_t\in T$ такие, что $x_1=x$, $f(x_i)=x_{i-1}$, при $2\leqslant i\leqslant t$, и $\neg\exists x(x\in T\&f(x)=x_t)$.

Следовательно, $S_{об}(T, F\setminus\{f\})=\min\limits_{g\in F\setminus\{f\}}\max\limits_{x\in T} S_{об}(x, g)=k+1$, откуда следует требуемое утверждение.

Пусть расшифровка некоторой ПМ v производится по ПМ x такой, что $x = x_1 \cup x_2$ и в x_1 включены „типичные“ для v элементы, а в x_2—„нетипичные“, или „патологические“.

Пусть при этом множество объектов, включенных в x, не позволяет полностью расшифровать v посредством заданных индукторов. В таком случае равноправное рассмотрение всех элементов из x, характерное для расшифровки посредством согласующих индукторов, может привести к классификации, содержащей большее число ошибок, чем классификация, основанная на x_1 и не запрещающая ошибки на x_2. Такая расшифровка возможна при применении несогласующих индукторов.

В следующей теореме придан точный смысл одной из возможных ситуаций, сходных с вышеуказанной.

Теорема 10. *Для произвольной* ПМ $v \in S_{>3}$ *можно указать такие согласующий* (f_1) *и несогласующий* (f_2) *индукторы, что для произвольной* ПМ $x \in S_{\leqslant |v|-3} \setminus \{\varnothing, \varnothing\}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$f_i(x) \not\subseteq v \quad \text{и} \quad v \not\subseteq f_i(x), \quad \text{при} \quad i = 1, 2.$$

$$x \subseteq f_1(x) \quad \text{и} \quad x \not\subseteq f_2(x),$$

но $|f_2(x) \cap v| > |f_1(x) \cap v|$.

Доказательство. 1. Построим f_1. Расположим элементы $D^{|v|}$ в последовательность $v, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{k_1}^1, \ldots, v_1^t, \ldots, v_{k_t}^t$ такую, что

$$\forall ij (1 \leqslant i \leqslant t \,\&\, 1 \leqslant j \leqslant k_i \to |v \nabla v_j^i| = i),$$

где $t = \max\limits_{i,j} (v_j^i \nabla v)$.

Покажем, что $S_{\leqslant |v|-3} \subseteq \bigcup\limits_{i=3}^{t} \bigcup\limits_{j=1}^{k_i} R(v_j^i)$. Допустим обратное. Тогда

$$\exists xy (x \in S_{\leqslant |v|-3} \,\&\, x \notin \bigcup_{i=3}^{t} \bigcup_{j=1}^{k_i} R(v_j^i) \,\&\, x \subseteq y \,\&\, y \in D^{|v|-3}).$$

Так как $k \geqslant 5$ и $y \in D^{|v|-3}$, то к y можно добавить 3 новых элемента из M так, что для построенной ПМ v' будут выполняться следующие соотношения:

$$|v'| = |v|, \quad y \subseteq v' \quad \text{и} \quad |v' \nabla v| = 3.$$

Из последнего следует, что v', а следовательно и x, принадлежат $\bigcup\limits_{i=2}^{t} \bigcup\limits_{j=1}^{k_i} R(v_j^i)$, что опровергает наше допущение.

Определим f_1 следующим образом:

1). Пусть $D_j^i = R(v_j^i) \setminus \{ x | x \subseteq u \,\&\, u \in \{ v_{j+1}^i, v_{j+2}^i, \ldots, v_{k_i}^i, \ldots, v_1^t, v_2^t, \ldots, v_{k_t}^t \}\}$. Тогда при $3 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$ выполняется $\forall x (x \in S_{\leqslant |v|-3} \cap \cap D_j^i \to f_1(x) = v_j^i)$.

2). $\forall x(x \in T \setminus S_{\leqslant |v|-3} \to f_1(x) = x)$.

Ясно, что $|f_1(x) \nabla v| \geqslant 3$ для произвольного $x \in S_{\leqslant |v|-3}$.

2. Построим f_2. Пусть $\{v_1^2, \ldots, v_{k_2}^2\}$ множество всех ПМ из $D^{|v|}$ таких, что $|v_j^2 \nabla v| = 2$, при $1 \leqslant j \leqslant k_2$. Так как $v \in S_{>3}$, то $k \geqslant 4$ и потому множество $\{v_1^2, \ldots, v_{k_2}^2\}$ непусто.

Легко показать, что

$$\forall x \exists j (x \in D^1 \& 1 \leqslant j \leqslant k_2 \& x \subseteq v_j^2). \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots, B_{2k}$ всех согласованных расширений, соответствующих элементам $u_1, u_2, \ldots, u_{2k}$ множества D^1 и удовлетворяющих следующему условию:

$$B_i = \{x | x \in S_{\leqslant |v|-3} \& u_i \subseteq x \& x \notin \bigcup_{j=1}^{i=1} B_j\}, \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant 2k.$$

Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S_{\leqslant |v|-3} \setminus \{\varnothing, \varnothing\}$. Из множества $\{v_1^2, \ldots, v_{k_2}^2\}$ выберем произвольную последовательность $v_{i_1}^2, \ldots, v_{i_{2k}}^2$ такую, что для каждого u_j и соответствующего v_j^2, $u_j \subseteq v_j^2$, при $1 \leqslant j \leqslant 2k$. Согласно (1) такую последовательность построить можно. Тогда f_2 определяем следующим образом:

1. $\forall j x (x \in B_j \& 1 \leqslant j \leqslant 2k \to f_2(x) = v_{i_j}^2)$,

2. $\forall x (x \in T \setminus D^k \cup (\bigcup_{j=1}^{k} B_j) \to f_2(x) = v^*)$,

где v^* — произвольная ПМ из D^k. Ясно, что $|f_2(x) \nabla v| = 2$ для произвольного $x \in S_{\leqslant |v|-3}$, что и требовалось доказать.

Итак, для случая, когда расшифрованность ПМ понимается как полное совпадение гипотезы с этой ПМ, показано, что несогласующие индукторы, вообще говоря, расшифровывают ПМ не хуже согласующих. Однако требование полного совпадения гипотезы с искомой ПМ представляется слишком сильным. Возникает естественный вопрос: сохранятся ли преимущества несогласующих индукторов, если в условии расшифрованности требовать лишь частичного совпадения. В § 5 будет доказана устойчивость указанного свойства несогласующих индукторов. Исключение составляют расшифровки классов ПМ, мощность которых приближается к мощности всевозможных ПМ, либо когда вводится специальное ограничение о согласованности исходных данных с искомой ПМ.

4.1. В нижеследующих теоремах 11—15 анализируется π-сложность ПРО1 в классе ИВ с 1-индукторами при заданных ограничениях на T'. Теорема 11 способствует выявлению природы ограничений на нижние оценки π-сложности ПРО1 в зависимости от мощности T'. В

теоремах 12—15 оценивается π-сложность ПРО1 для классов симметрических и монотонных абс. ПМ в ИВ без обратной связи и с ней. Доказательства указанных теорем опубликованы в [84].

4.2. Теорема 11. $\forall n \exists A_n (n > 0 \to A_n \subseteq D^k \& S_{об}(A_n, \Omega_n^1) <]\log|A_n|[)$. Обозначим через A_s и A_m множества всех симметрических и монотонных функций (абс. ПМ) соответственно. Следующая теорема получена на основе теоремы Шеннона о рабочих числах симметрических функций [133].

Теорема 12. $\exists J_s (J_s \in \Omega_n^1 \& S_{об}(A_s, J_s) = n+1)$.

Следствие 1.12. $k_s \leqslant S_{об}(A_s, \Omega_n^1) \leqslant n+1$, *где* $k_s = \mu_t (2^t C_{2^t}^{t_n} \geqslant 2^{n+1})$, *а* μ—*оператор минимизации* [56].

Теорема 10 существенно использует определения и результаты из [50].

Теорема 13. $k_m \leqslant S_{об}(A_m, \Omega_n^1) \leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$, *где* $k_m = \mu_t (2^t C_{2^t}^{t_n} > d)$, $d = 2^{C_n^{[\frac{n}{2}]}}$—*нижняя оценка числа монотонных булевых функций* [78].

Теорема 14. *Для класса* A_s *можно построить абс. 1-индуктор* J_s *и регулятор* q_s *такие, что* $0 \leqslant S_T(v, J_s, \varphi_v) \leqslant n+1$ *и* $1 \leqslant S_{об}(v, J_s, \varphi_v) \leqslant n+1$, *где* $v \in A_s$ *и* φ_v (J_s, q_s)*-порожденный и согласованный с* v *ГПН.*

Теорема 15. *Для класса* A_m *можно построить 1-индуктор* J_m *и регулятор* q_m *такие, что* $S_T(v, J_m, \varphi_v) \leqslant p$ *и* $S_{об}(v, J_m, \varphi_v) \leqslant$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{4}]} C_{k_i}^{4j} 2^{n-a_p} + \sum_{i=1}^{p} 2C_{k_i}^{[\frac{k_i}{2}]} 2^{n-a_i} \prod_{e=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{[\frac{k_i}{4}]} C_{k_j}^{4e},$$

где $v \in A_m$, φ_v—(J_m, q_m)*-порожденный и согласованный с* v *ГПН,* p—*число, удовлетворяющее условиям* $(p+1)(\sqrt[3]{16})^{p+1} \geqslant n > p(\sqrt[3]{16})^p$; $k_i = \left]\frac{\sqrt[3]{16}-1}{(\sqrt[3]{16})^i} n\right[$, $1 \leqslant i \leqslant p$;

$$a_r = \sum_{i=1}^{r} k_i, \quad 1 \leqslant r \leqslant p.$$

§ 5. Об устойчивости сложностных характеристик согласующих индукторов

1. В § 4 исследовался вопрос о том, всегда ли в процессе индуктивного обобщения гипотеза должна быть полностью согласована с исходными эмпирическими данными или возможны ситуации, когда рассогласованность того или иного вида оказывается предпочтительной.

Ясно, что ответ на этот вопрос существенно зависит от модели, в рамках которой уточняется понятие согласованности, а также выбранных критериев сложности расшифровки. Для случая, когда расшифрованность ПМ понимается как полное совпадение гипотезы с этой ПМ, в предыдущем параграфе было показано, что несогласующие индукторы, вообще говоря, расшифровывают ПМ не хуже сог-

ласующих. Однако требование полного совпадения гипотезы с искомой ПМ представляется слишком сильным. Возникает вопрос: сохранятся ли преимущества несогласующих индукторов, если в условии расшифрованности требовать, чтобы симметрическая разность между гипотезой и искомой ПМ не превышала заданного порога, зависящего от мощности этой ПМ. В данном параграфе, содержание которого совпадает с работой [58], будет доказана устойчивость указанного свойства несогласующих индукторов относительно фактически произвольного распределения порогов (теоремы 16, 17). Исключение составляют расшифровки классов ПМ, мощность которых приближается к мощности всевозможных ПМ (теорема 18), либо когда вводится специальное ограничение о согласованности исходных данных с искомой ПМ (теоремы 19, 20).

2. Пусть каждому числу i $(0 \leqslant i \leqslant k)$ поставлено в соответствие какое-либо натуральное число $\delta_i \leqslant i$, причем всегда $\delta_0 = 0$.

Объемной сложностью ПМ v относительно индуктора f и множества $\delta = \{\delta_i | 0 \leqslant i \leqslant k\}$ назовем число:

$$S_\delta(v, f) = \begin{cases} \min\limits_{|f(x) \nabla v| \leqslant \delta_{|V|}} |x|, & \text{если такое } x \text{ существует,} \\ k+1, & \text{в обратном случае.} \end{cases}$$

Величины δ_i играют здесь роль порогов.

Объемной сложностью множества $A \subseteq T$ *относительно* $G \subseteq F$ *при* $\delta = \{\delta_i | 0 \leqslant i \leqslant k\}$ назовем число

$$S_\delta(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} S_\delta(v, f).$$

Когда речь будет идти о заранее заданной δ, то мы в этом параграфе будем писать просто $S(A, G)$ вместо $S_\delta(A, G)$. При $\delta_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ это определение совпадает со сложностью, введенной в § 4.

Введем некоторые дополнительные соглашения.

По определению индуктора для любых $f_1, f_2 \in F$ и $x \in N \setminus T$, $f_1(x) = f_2(x)$; поэтому при построении индукторов нас будут интересовать лишь первые $|T|$ его значений. В соответствии с этим, например, запись $f(x) \equiv x$ будет обозначать индуктор

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in T, \\ |T|+1, & \text{если } x \in N \setminus T. \end{cases}$$

Скажем, что *ПМ* x *расшифровывает ПМ* v *посредством индуктора* f, если $|f(x) \nabla v| \leqslant \delta_{|v|}$. Заметим, что если $\delta_{|v|} = 0$, то x будет расшифровывать v тогда и только тогда, когда $f(x) = v$. Будем говорить также, что *множество* $A \subseteq T$ *расшифровывается* индуктором f, если для всякого $v \in A$ найдется $x \in T$ такое, что $|f(x) \nabla v| \leqslant \delta_{|v|}$.

Из вышеуказанных определений следует, что вместо однозначного отображения U в T' $(T' = A)$, исследуемого в ПРО1 § 4, здесь рассматривается отношение между U и T' такое, что ρ-приближения не обязательно одноэлементны и могут пересекаться. Это об-

стоятельство может нас вывести из класса определенных нами в главе 1 идеальных ПРО, так как нарушается условие квазифункциональности отображения из U в T'. Однако расширение определения ПРО, при котором допускается пересечение ρ-приближений, естественный ближайший шаг в исследованиях. Поэтому анализ сложности расшифровки соответствующих такого рода ПРО классов ПМ необходим и в данной работе уместен.

В следующей теореме 16 даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы при расшифровке произвольных множеств $A \subseteq T$ несогласующие индукторы работали не хуже согласующих; при этом условия оказываются достаточно слабыми.

Теорема 16. *Неравенство* $S(A, F_{нс}) \leqslant S(A, F_c)$ *выполняется одновременно для всех* A, $A \subseteq F$, *тогда и только тогда, когда существует* i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant k-1)$ *такое, что* $\delta_{i_0} > 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $S(A, F_c) < k-1$. Возьмем произвольный оптимальный согласующий индуктор f и ПМ $x_0 \in D^{k-1}$. Поскольку сложность расшифровки A меньше $k-1$, то для всякого $v \in A$, найдется z, $|z| < k-1$, которое тоже расшифровывает v. Но тогда несогласующий индуктор

$$(*) \qquad f_{нс}(x) = \begin{cases} f_c(x), & \text{при } x \neq x_0, \\ (\varnothing, M), & \text{при } x = x_0 \& \nu_1(x_0) \neq \varnothing, \\ (M, \varnothing), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

будет расшифровывать A с такой же сложностью, что и f_c.

Предположим теперь, что $S(A, F_c) = k$. Тогда индуктор $f_c(x) \equiv x$ является оптимальным. Пусть $x_0 \in D^{i_0}$. При таких предположениях индуктор, определяемый схемой $(*)$, будет тоже работать со сложностью k.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $S(A, F_c) = k-1$. Без нарушения общности можно предположить, что $\delta_k = 0$. В противном случае, так как $S(A, F_c) = k-1$ и так как для любого $x \in D^k$ найдется $y \in D^{k-1}$ такое, что $|x \nabla y| = 1$, то индуктор $f_c(x) \equiv x$ будет оптимальным. Тогда, если $x_0 \in D^{i_0}$, то индуктор, определяемый схемой $(*)$, тоже будет оптимальным.

Можно предположить также, что $|A \cap D^k| > 1$. В противном случае легко построить несогласующий индуктор, работающий со сложностью $k-1$. Действительно, если $|A \cap D^k| \leqslant 1$, то либо $A \cap D^k = \varnothing$, либо $A \cap D^k = \{y_0\}$, где $y_0 \in D^k$. Пусть $x_0 \in D^{i_0}$ и $x_0 \not\subseteq y_0$. Если $A \cap D^k$ пусто, то $f_c(x) \equiv x$ является оптимальным и схема $(*)$ опять дает пример оптимального несогласующего индуктора. Когда же $A \cap D^k = \{y_0\}$, то легко видеть, что для несогласующего индуктора

$$f_{нс}(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{при } x \neq x_0, \\ y_0, & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

выполнено равенство $S(A, f_{нс}) = k-1 = S(A, F_c)$.

Таким образом, нам осталось доказать теорему при следующих предположениях: $S(A, F_c)=k-1$, $\delta_k=0$ и $|A\cap D^k|>1$.

Пусть y_1, y_2—произвольные ПМ из $A\cap D^k$, а f_c—оптимальный согласующий индуктор.

Поскольку $S(A, f_c)=k-1$ и $\delta_k=0$, то найдутся x_1 и x_2 такие, что $|x_j|\leqslant k-1$ и $f_c(x_j)=y_j$ $(j=1, 2)$. Пусть хотя бы одно x_j, скажем, x_1 не принадлежит D^{k-1}. Тогда, если z—ПМ из D^{k-1} такая, что $x_1\not\subseteq z$, то сложность относительно A несогласующего индуктора

$$f_{нс}(x)=\begin{cases} f_c(x), & \text{при } x\neq x_1 \text{ и } x\neq z,\\ f_c(x_1), & \text{при } x=z,\\ f_c(z), & \text{при } x=x_1,\end{cases}$$

будет равна $k-1$. Если же оба x_j принадлежат D^{k-1}, то оптимальным будет несогласующий индуктор

$$f_{нс}(x)=\begin{cases} f_c(x), & \text{при } x\neq x_1 \text{ и } x\neq x_2,\\ f_c(x_1), & \text{при } x=x_2,\\ f_c(x_2), & \text{при } x=x_1.\end{cases}$$

Необходимость. Легко видеть, что если $\delta_i=0$ для всех $i=1, 2,\ldots k-1$, то множество $A=T\setminus D^k$ расшифровывается индуктором $f_c(x)\equiv x$ со сложностью $k-1$ и произвольный индуктор, отличный от него, расшифровывает A со сложностью $k+1$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к более детальному изучению соотношения сложностей $S_\delta(A, F_c)$ и $S_\delta(A, F_{нс})$ при различных конкретных распределениях δ_i. Оказывается, что если мы будем разумно ограничивать пороги δ_i, то неравенство $S_\delta(A, F_{нс})\leqslant S_\delta(A, F_c)$, доказанное в теореме 18, для некоторых $A\subseteq T$ превращается в строгое.

Если же все δ_i очень велики, то любое множество $A\subseteq T$ будет расшифровываться согласующими и несогласующими индукторами всегда с одной и той же сложностью, равной 1 (с единственным исключением, когда $A=\{(\varnothing, \varnothing)\}$). Естественно считать такой случай неинтересным.

Приведем доказательство этих утверждений.

Теорема 17. *Пусть* $\delta_i=0$ *при* $i=1$. *Тогда*

$$\exists A(A\subseteq T\&S_\delta(A, F_{нс})<S_\delta(A, F_c))\sim\exists_{i_0}(2\leqslant i_0\leqslant k\&\delta_{i_0}\leqslant i_0-2).$$

Доказательство. Необходимость. Предположим обратное, то есть что $\delta_i\geqslant i-1$ для всех i $(2\leqslant i\leqslant k)$.

Пусть $v\in T\setminus D^1$, $\nu_1(v)\neq\varnothing$ и $a\in\nu_1(v)$. Поскольку $\delta_{|v|}\geqslant|v|-1$, то $|v\nabla(\{a\}, \varnothing)|\leqslant\delta_{|v|}$. Это значит, что индукторы

$$f_c(x)\equiv x \quad\text{и}\quad f_{нс}(x)\equiv\begin{cases} x, & \text{если } x\neq(\{c\}, \{d\}),\\ (\varnothing, M), & \text{если } x=(\{c\}, \{d\}),\end{cases}$$

где $(\{c\}, \{d\})$—произвольная ПМ из D^2, будут расшифровывать любое множество A со сложностью, равной 1, если $A\neq\{(\varnothing, \varnothing)\}$, и со сложностью 0 в противном случае. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\exists i_0(2\leqslant i_0\leqslant k\&\delta_{i_0}\leqslant i_0-2)$. В таком случае справедлива следующая

Лемма 16. *Для любого $a\in M$ найдутся такие x_1 и x_2 из D^{i_0}, что*

$$\neg\exists y(y\in T\&a\in\nu_1(y)\&(|y\nabla x_1|\leqslant\delta_{i_0})\&(|y\nabla x_2|\leqslant\delta_{i_0})).$$

Построим x_1 и x_2. Обозначим через $x_0(x_0\in D^{i_0})$ ПМ $(A_0, \{a\})$, где A_0—любое подмножество $M\setminus\{a\}$ мощности $i-1$. Пусть A_1 и A_2—два непересекающихся подмножества A_0 мощности $[\delta_{i_0}/2]$. За x_1 и x_2 возьмем следующие ПМ:

$$x_1=(A_0\setminus A_1,\ A_1\cup\{a\}),\ x_2=(A_0\setminus A_2,\ A_2\cup\{a\}).$$

(Отметим, что при $i_0=2$ $A_1=A_2=\varnothing$ и тогда $x_1=x_2=x_0$; однако дальнейшие рассуждения верны и в этом случае).

Легко проверить, что x_1 и x_2 удовлетворяют следующим условиям:

а. Если δ_{i_0} четно, то $|x_0\nabla x_1|=|x_0\nabla x_2|=\delta_{i_0}$; если же δ_{i_0} нечетно, то $|x_0\nabla x_1|=|x_0\nabla x_2|=\delta_{i_0}-1$;

б. Симметрическая разность $|x_1\nabla x_2|$ равна $2\delta_{i_0}$, если δ_{i_0} четно, и $2\delta_{i_0}-2$ в противном случае.

Теперь докажем, что ни для одного $y\in T$ такого, что $a\in\nu_1(y)$ и $|y\nabla x_1|\leqslant\delta_{i_0}$ не может быть $|y\nabla x_2|\leqslant\delta_{i_0}$.

Без нарушения общности можно считать, что в y не входит ни одного элемента, не входящего в x_0, и что y содержит $A_0\setminus(A_1\cup A_2)$ в левой компоненте; более того, если элемент $b\in M$ входит в какую-либо компоненту y, то он входит в ту же компоненту x_1 или x_2 (в этом отношении исключение составляет только элемент a, для которого $a\in\nu_1(y)$, но $a\in\nu_0(x_1)\cap\nu_0(x_2)$). Минимальной по мощности такой ПМ будет

$$y_0=(A_0\setminus(A_1\cup A_2),\ \{a\}).$$

Для нее $|y_0\nabla x_j|=\delta_{i_0}+2$ при четном δ_{i_0} и $|y_0\nabla x_j|=\delta_{i_0}+1$ при нечетном δ_{i_0} $(j=1,2)$.

Но добавление к какой-либо компоненте y_0 элемента из x_1 влечет за собой уменьшение $|y_0\nabla x_1|$ на единицу и в то же время на единицу увеличивается $|y_0\nabla x_2|$. Следовательно, добавление новых элементов не может сделать одновременно обе симметрические разности меньше δ_{i_0}, если до этого они были больше. Таким образом, лемма доказана.

Доказательство теоремы разобьем на 2 случая: $\delta_{i_0}\leqslant 1$ и $\delta_{i_0}\geqslant 2$.

Пусть $\delta_{i_0}\leqslant 1$. Тогда за A можно взять множество

$$A=D^0\cup D^1\setminus\{(\{a\},\ \varnothing)\}\cup\{x_0\},$$

где $a\in\nu_0(x_0)$ и $x_0\in D^{i_0}$ — ПМ, определенная в лемме 16.

Поскольку $\delta_1=0$, то ясно, что для любого индуктора, расшифровывающего A, будет $f(x)=x$, если $x\in D^1\setminus\{(\{a\},\ \varnothing)\}$. В то же время для всякого согласующего f_c будет $|f_c(x)\nabla x_0|\geqslant 2>\delta_{i_0}$, если $x\in D^1$

в том числе и для $x=(\{a\}, \varnothing)$. Следовательно, та ПМ z, для которой $|f_c(z)\nabla x_0|\leqslant\delta_{i_0}$ не из D^1, а это значит, что $S(x_0, f_c)\geqslant 2$, откуда следует, что $S(A, f_c)\geqslant 2$. В то же время индуктор $f_{нс}\in F_{нс}$, определенный как

$$f_{нс}(x)\equiv\begin{cases} x, & \text{если } x\neq(\{a\}, \varnothing), \\ x_0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

будет расшифровывать x_0, а значит и все А со сложностью 1.

Пусть теперь $\delta_{i_0}\geqslant 2$.

Положим

$$A=D^0\cup D^1\setminus\{(\{a\}, \varnothing)\}\cup\{x_1, x_2\},$$

где x_1 и x_2—ПМ, определенные в лемме 16.

Как и в предыдущем случае, можно утверждать, что

$$\forall x, f(x\in D^1\setminus\{(\{a\}, \varnothing)\}\&f\in F\to f(x)=x\&|f(x)\nabla x_j|\geqslant\delta_{i_0})\quad (j=1, 2).$$

Но из леммы 1 следует, что при согласующем индукторе f_c для $f_c((\{a\}, \varnothing))$ не может быть одновременно $|f_c((\{a\}, \varnothing))\nabla x_1|\leqslant\delta_{i_0}$ и $|f_c((\{a\}, \varnothing))\nabla x_2|\leqslant\delta_i$, так как $a\in\nu_1(f_c((\{a\}, \varnothing)))$. Значит, как и выше, $S(f_c, A)\geqslant 2$ для всех $f_c\in F_c$. В то же время для индуктора $f_{нс}(x)$ такого, что $f_{нс}(x)=x$, если $x\neq(\{a\}, \varnothing)$, и $f_{нс}(x)=x_0$, если $x=(\{a\},\varnothing)$, будет $S(A, F_{нс})=1$, так как по построению x_1 и x_2 отличаются от x_0 (в смысле симметрической разности) не более чем на δ_{i_0}.

Теорема доказана.

Следствие 1.17. *Пусть существует* i_0 $(3\leqslant i_0\leqslant k;\ k\geqslant 4)$ *такое, что* $\delta_{i_0}=0$. *Тогда найдется такое* $A\subseteq T$, *что*

$$S(A, F_{нс})<S(A, F_c).$$

Покажем, что при $\delta_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ можно указать классы ПМ, которые согласующими индукторами расшифровываются строго лучше, чем несогласующими.

Теорема 18. *Пусть* $\delta_i=0$ *для всех* i $(1\leqslant i\leqslant k)$. *Чтобы для некоторого множества* A *выполнялось неравенство*

$$S(A, F_c)<S(A, F_{нс})$$

необходимо и достаточно, чтобы A *удовлетворяло одному из следующих двух условий*:

a) $|A|=|T\setminus D^k|$ и $\forall x, y(x\in(T\setminus D^k)\setminus A\&y\in A\&|x|<|y|\to x\sqsubset y)$;

b) $A\supseteq T\setminus D^k$.

Доказательство. Необходимость. Пусть a) и b) не выполняются. Тогда,

либо 1: $|A|>|T\setminus D^k|$, но $T\setminus D^k\not\subseteq A$,

либо 2: $|A|<|T\setminus D^k|$,

либо 3: $|A|=|T\setminus D^k|$, но a) в целом не выполняется.

Рассмотрим индуктор $f_c(x)\equiv x$. Если бы имело место 1), то ввиду свойства 8 (§ 4)

$$S(A, F)=k=S(A, F_c)=S(A, f_c).$$

Так как $T\setminus D^k\not\subseteq A$, то найдется $x_0\in T\setminus D^k$ такое, что $f(x_0)\notin A$ (поскольку $f_c(x_0)=x_0$). Но тогда индуктор

$$(*)\quad f_{нс}(x)\equiv\begin{cases} f_c(x), & \text{если } x\neq x_0,\\ (\varnothing, M), & \text{если } x=x_0 \text{ и } \nu_1(x_0)\neq\varnothing,\\ (M, \varnothing), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

будет несогласующим и будет работать также со сложностью k.

Пусть имеет место случай 2 и пусть f_c—произвольный оптимальный согласующий индуктор. Как и в случае 1 для подходящего x_0 индуктор, определяемый схемой (*), будет работать с такой же сложностью, что и f_c. Более того, согласно теореме 17 при некоторых A можно подобрать такой индуктор $f\in F_{нс}$, что он будет работать лучше любого согласующего.

Пусть выполнено 3. Из свойства 8 следует, что $S(A, F)\geqslant k-1$. Построим несогласующий индуктор $f_{нс}$ такой, что он расшифровывает A со сложностью $k-1$. С этой целью выберем какие-нибудь x_0 и y_0, удовлетворяющие условию 3 и положим $f_{нс}(x_0)=y_0$. В остальных точках определим $f_{нс}$ так, чтобы $f_{нс}$ был индуктором и чтобы отображение, осуществляемое им между $T\setminus D^k$ и A было взаимооднозначным (такое отображение возможно, так как $x_0\notin A$). Легко видеть, что $S(A, F_{нс})=k-1\leqslant S(A, F_c)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеет место а). Исследуем структуру множества A. Поскольку $|A|=|T\setminus D^k|$, то число элементов из D^k, принадлежащих A, равно числу элементов из $T\setminus D^k$, не принадлежащих A, т. е. $|D^k\cap A|=|(T\setminus D^k)\setminus A|$. Докажем, что $(T\setminus D^k)\setminus A=D^{k-1}\setminus A$. Допустим, что существует $x_0\in D^{i_0}$ $(i_0<k-1)$ такой, что $x_0\notin A$. Введем вспомогательное определение.

ПМ x назовем *обратной* ПМ y, если $y=(\nu_0(x), \nu_1(x))$. Запись y^{-1} будет обозначать ПМ, обратную y. ПМ y и y^{-1} будем называть обратными. Очевидно, что

$$x=y^{-1}\sim y=x^{-1}, \tag{1}$$

$$\neg\exists x, y(x, y\in T\,\&\,y\subseteq x\,\&\,y^{-1}\subseteq x), \tag{2}$$

$$\forall x\exists y_0(x\in T\setminus D^k\to|y_0|>|x|\,\&\,x\subseteq y_0\,\&\,x\subseteq y_0^{-1}). \tag{3}$$

Выберем теперь для x_0 какое-либо y_0, удовлетворяющее (3). Тогда $y_0\notin A$ и $y_0^{-1}\notin A$—иначе нарушилось бы условие а). Поскольку мы предположили существование x_0, то множество $(T\setminus D^k)\setminus A$ непусто. Но тогда $A\cap D^k$ тоже непусто и, ввиду а), для каждого элемента $z\in A\cap D^k$ должно быть $y_0\subseteq z$ и $y_0^{-1}\subseteq z$, что противоречит (2).

Итак, всякая ПМ из $T\setminus D^k$, не принадлежащая A, принадлежит D^{k-1}. Покажем, что число таких ПМ не больше 1.

Для любых ПМ x и y $(x, y \in D^{k-1})$ существует самое большее одна ПМ $z \in D^k$ такая, что $x \subseteq z$ и $y \subseteq z$. В самом деле, если $x \subseteq z$, то z есть или $(\nu_1(x) \cup \{a\}, \nu_0(x))$, или $(\nu_0(x), \nu_1(x) \cup \{a\})$, где a—единственный элемент M, не принадлежащий $\nu_1(x) \cup \nu_0(x)$. Далее, если a не принадлежит $\nu_1(y) \cup \nu_0(y)$, то x и y состоят из одних и тех же элементов и найдется элемент, принадлежащий правой компоненте одного и левой компоненте другого одновременно. Но тогда x и y не будут иметь общего расширения. Если $a \in \nu_1(y)$, то $(\nu_1(x), \nu_0(x) \cup \{a\})$ не может являться расширением y; если же $a \in \nu_0(y)$, то расширением не будет уже $(\nu_1(x) \cup \{a\}, \nu_0(x))$.

Таким образом, условие $|D^{k-1} \setminus A| = |(T \setminus D^k) \setminus A| = |A \cap D^k|$, вытекающее из условия a), выполняется лишь при $|D^{k-1} \setminus A| = 1$.

Итак, мы нашли, что всякое множество A, удовлетворяющее условию a) будет иметь вид:

$$A = ((T \setminus D^k) \setminus \{x_0\}) \cup \{y_0\},$$

где $x_0 \in D^{k-1}$ и $x_0 \subseteq y_0$ (или же A есть просто $T \setminus D^k$). Поскольку $|A| = |T \setminus D^k|$, то из свойства 8 следует, что $S(A, F) \geqslant k-1$. Легко видеть, что единственным индуктором, расшифровывающим A со сложностью $k-1$ является согласующий индуктор

$$f_c(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \neq x_0, \\ y_0, & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Это следует из определения индуктора. (Если $A = T \setminus D^k$, то таким индуктором будет $f_c(x) \equiv x$).

Достаточность условия a) доказана.

Если выполнено b), то и теперь индуктор $f_c(x) \equiv x$ будет единственным индуктором, расшифровывающим A.

Теорема доказана.

Замечание. В теореме 16 приведен пример множества, на котором при условии $\delta_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$ и $\delta_k > 0$ согласующие индукторы работают лучше несогласующих. Легко видеть, что класс всех таких множеств совпадает с классом, определенным условием b) теоремы 18.

Теоремы 16—18 дают представление о соотношении сложностей расшифровки классов ПМ согласующими и несогласующими индукторами при различных распределениях порогов δ_i. Точнее, справедливо следующее

Следствие 1.18.

1. *Если* $\forall i (1 \leqslant i \leqslant k-1 \to \delta_i = 0)$, *то*

$\exists A_1, A_2 (A_1, A_2 \subseteq T \& S(A_1 F_c) < S(A_1 F_{нс}) \& S(A_2, F_{нс}) < S(A_2, F_c))$;

2. *Если* $\exists i_0 (1 \leqslant i_0 \leqslant k-1 \& \delta_{i_0} > 0)$, *то*

(a) $\delta_1 = 0 \& \exists i (2 \leqslant i \leqslant k \& \delta_i \leqslant i-2) \to$

$\to (\forall A (A \subseteq T \to S(A, F_{нс}) \leqslant S(A, F_c)) \& \exists B (B \subseteq T \& S(B, F_{нс}) < S(B, F_c)))$;

(b) $\delta_1=0 \& \forall i(2\leqslant i\leqslant k\to\delta_i>i-2)\to\forall A(A\subseteq T\to S(A, F_c)=S(A, F_{нс}))$;

(c) $\delta_1>0 \& \exists i\ (3\leqslant i\leqslant k \& k\leqslant 4 \& \delta_i=0)\to$

$\to(\forall A(A\subseteq T\to S(A, F_{нс})\leqslant S(A, F_c)) \& \exists B(B\subseteq T \& S(B, F_{нс})<S(B, F_c)))$;

(d) $\delta_1>0 \& \forall i\ (3\leqslant i\leqslant k \& k\leqslant 4\to\delta_i>0)\to\forall A(A\subseteq T\to S(A,F_{нс})\leqslant S(A,F_c))$.

3. Пусть даны индуктор f и ПМ x, v. Будем говорить, что x и v *находятся в отношении* θ_f (этот факт будем обозначать через $x\theta_f v$), если $x\subseteq v$ и x расшифровывает v посредством f, то есть $|f(x)\nabla v|\leqslant\delta_{|v|}$.

Предикат θ_f по существу накладывает более жесткие ограничения на те ПМ x, посредством которых может быть расшифрована данная ПМ v, а именно, требование согласованности x с v. Сложность расшифровки $S(v, f)$ при этом ограничении принимает следующий вид:

$$S^1(v, f)\equiv\begin{cases}\min\limits_{x\theta_f v}|x|, & \text{если такое } x \text{ существует,}\\ k+1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Скажем, что множество $B\subseteq T$ *расшифровывается* посредством индуктора f, если для всякого $v\in A$ найдется $x\in B$ такое, что $x\theta_f v$. Через $Z(A, f)$ обозначим какое-либо минимальное по мощности множество, расшифровывающее A посредством индуктора f и удовлетворяющее следующему свойству:

$$S^1(A, f)=\max_{x\in Z(A,f)}|x|.$$

Множество $Z(A, f)$ назовем *рабочей зоной* f при расшифровке множества A.

Данное определение корректно. Действительно, пусть x_v—какая-либо минимальная по мощности ПМ такая, что $x_v\theta_f v$. Тогда множество $\{x_v|v\in A\}$ будет расшифровывать A посредством f и в то же время, для него будет выполнено вышеуказанное свойство.

Заметим, что условие вхождения x_v в $Z(A, f)$ для каждого v, вообще говоря, не является необходимым.

Теорема 19. $\forall A(A\subseteq T\to S^1(A, F_c)\leqslant S^1(A, F_{нс}))$.

Попытаемся найти класс тех множеств $A\subseteq T$, на которых согласующие индукторы работают строго лучше несогласующих.

Теорема 20. *Пусть* $\delta_i=0$ для всех i $(1\leqslant i\leqslant k)$. *Тогда для выполнения неравенства*

$$S^1(A, F_c)<S^1(A, F_{нс})$$

необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

1. $|A|=|T\setminus D^k|$ *и существует такое взаимооднозначное отображение* Ψ *из* $(T\setminus D^k)\setminus A$ в $D^k\cap A$, *что* $x\subseteq\Psi(x)$ *для любого* x.

2. $A\supseteq T\setminus D^k$.

Класс множеств, выделенный в теореме 20, достаточно обширен

и интересно найти, как он изменится, если допускать для некоторых δ значения, отличные от 0. Ответом на этот вопрос является

Теорема 21. *Пусть* $\delta_i \leqslant \delta_{i+1}$ *для всех* i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *и существует* $i_0 (1 \leqslant i_0 \leqslant k-1)$ *такое, что* $\delta_{i_0} > 0$. *Тогда для произвольного множества* $A \subseteq T$

$$S^1(A, F_c) = S^1(A, F_{нс}).$$

4. Вопрос о том, в каких случаях какой тип индукторов более эффективен, в данном разделе рассмотрен относительно конкретных вариантов модели индуктивного обобщения и сложности расшифровки при варьировании точности совпадения гипотез с искомой ПМ.

Можно сказать, что соотношения между F_c и $F_{нс}$, полученные в § 5, устойчивы к этим вариациям.

Сформулируем некоторые представляющие интерес вопросы дальнейших исследований сравнительных характеристик F_c и $F_{нс}$.

4.1. В теоремах 16—18 сравнивались возможности F_c и $F_{нс}$, при отсутствии ограничений на входные ПМ, посредством которых индукторы расшифровывают искомые. Затем в теоремах 19—21 было введено требование о согласованности входных ПМ с искомыми. Интересно ввести другие ограничения на процесс расшифровки и рассмотреть соотношения F_c и $F_{нс}$ при расшифровке ПМ, информация о которых задается некоторой ГПН φ, в частности, в условиях индуктивного вывода, определяемого следующим образом:

$$h(t) = \begin{cases} f(\varphi(0)), & \text{если} \quad t = 0, \\ h(t-1), & \text{если} \quad t > 0 \text{ и } |h(t-1) \setminus \varphi(t)| \leqslant \delta_{|h(t-1)|}, \\ f(\varphi(t)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где f — некоторый индуктор, а φ—ГПН либо согласованная с искомой ПМ v, либо нет и удовлетворяющая, например, условию

$$|\varphi(t) \setminus v| \leqslant \delta_{|\varphi(t)|}.$$

Другими словами оценить сложность классов ПМ относительно ИВ непосредственно, а не через их нижние оценки, получаемые при анализе сложности $S(A, G)$.

4.2. В наших рассмотрениях сложность $S(A, f)$ класса ПМ A относительно индуктора f оценивалась по максимальной (пиковой) сложности расшифровки индивидуальных ПМ из A. Однако было бы правильнее $S(A, f)$ оценивать через сложность расшифровки „большей части“ ПМ из A. Это понятие можно уточнить следующим образом.

Пусть понятие мажоритарного пространства $\mathcal{M}(A)$ множества A и элементов $\mathcal{M}(A)$—большинств, уточнено так, как в [71].

Тогда, считая сложность $S(v, f)$ ПМ v относительно индуктора f заданной, например, так, как в настоящей работе, и определив сложность $S(B, f)$, где $B \in \mathcal{M}(A)$, A—заданный класс ПМ, сложность $S(A, F)$ естественно считать равной $\min\limits_{B \in \mathcal{M}(A)} S(B, f)$. При этом

сложность $S(B, f)$ можно вычислить, например, посредством усреднения значений $S(v, f)$ по B, то есть

$$S(B, f) = \frac{\sum_{v \in B} S(v, f)}{|B|}.$$

Эта сложность может служить нижней оценкой σ-сложности ПРО1 с ограничениями п. 2 данного раздела. Аналогичное рассмотрение интересно провести на основе средней комплексной сложности, определенной в § 4.1.

4.3. Для полноты исследований было бы полезно также выделить класс естественных понятий сложности ПМ относительно индукторов и рассмотреть соотношение F_c и $F_{нс}$ относительно всего класса. Заметим, что понятия „большинств" уместно ввести в определения согласующих индукторов и считать, например, f существенно согласующим относительно класса ПМ A, если условие $x \subseteq f(x)$, при $x \in A$, выполняется хотя бы для одного из большинств, определенных для A.

В заключение этого параграфа отметим, что А. А. Мартиросяном доказана устойчивость рассмотренных выше сравнительных сложностных характеристик согласующих и несогласующих индукторов для более общего случая, когда мера близости гипотез к истинным ПМ определяется отношением толерантности, порожденным мажоритарным пространством специального типа.

сложность $S(B, f)$ можно вычислить, например, посредством усреднения значений $S(v, f)$ по B, то есть

$$S(B, f) = \frac{\sum_{v \in B} S(v, f)}{|B|}.$$

Эта сложность может служить нижней оценкой σ-сложности ПРО1 с ограничениями п. 2 данного раздела. Аналогичное рассмотрение интересно провести на основе средней комплексной сложности, определенной в § 4.1.

4.3. Для полноты исследований было бы полезно также выделить класс естественных понятий сложности ПМ относительно индукторов и рассмотреть соотношение F_c и $F_{нс}$ относительно всего класса. Заметим, что понятия „большинств" уместно ввести в определения согласующих индукторов и считать, например, f существенно согласующим относительно класса ПМ A, если условие $x \subseteq f(x)$, при $x \in A$, выполняется хотя бы для одного из большинств, определенных для A.

В заключение этого параграфа отметим, что А. А. Мартиросяном доказана устойчивость рассмотренных выше сравнительных сложностных характеристик согласующих и несогласующих индукторов для более общего случая, когда мера близости гипотез к истинным ПМ определяется отношением толерантности, порожденным мажоритарным пространством специального типа.

Глава 4

ВОПРОСЫ АДАПТАЦИИ КОМБИНАТОРНЫХ АЛГОРИТМОВ

§ 1. Об алгоритмах комбинаторной регуляризации

1. В необозримом множестве проблем достаточно эффективные методы решения известны лишь для отдельно выделенных классов. Освоение же новых проблем происходит как посредством поиска оригинальных методов решений для них, так и посредством сведения проблем к сравнительно хорошо изученным. В последнем случае говорят о *регуляризации* этих проблем. Так, например, известны методы регуляризации некорректных проблем [115] и дискретных проблем математического программирования [49]. Понятие корректной проблемы, введенное Ж. Адамаром при решении проблем математической физики, в [115] формулируется следующим образом.

Для пары метрических пространств (F, U) проблема определения решений из пространства F по „исходным данным" u из пространства U называется *корректно поставленной* на паре (F, U), если удовлетворяет требованиям:

1. Для всякого элемента $u \in U$ существует решение z из пространства F;

2. Решение определяется однозначно;

3. Проблема устойчива на пространствах (F, U), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_F(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$, где $\rho_U(u_1, u_2)$ и $\rho_F(z_1, z_2)$—расстояния между u_1, u_2 и z_1, z_2, а z_1, z_2—решения в u_1, u_2 соответственно.

При этом условия 1 и 2 характеризуют математическую определенность проблемы, а условие 3 связано с ее физической детерминированностью и возможностью применения численных методов ее решения по приближенным исходным данным [115].

В [115] описаны эффективные методы регуляризации некорректных проблем, в которых дополнительно к условию метричности пространств F и U предполагается наличие определенной количественной или качественной информации об искомых решениях.

Интенсивно исследуются методы регуляризации дискретных проблем математического программирования [49]. Предметом этой теории, как известно, является проблема отыскания экстремума ска-

лярной функции n-мерного векторного аргумента при некоторых ограничениях на множество допустимых решений.

В наиболее развитой части этой теории областью изменения решений являются связные подмножества n-мерного евклидова пространства, достаточно хорошо изученные свойства которого позволяют рассуждать об общих свойствах множества решений и строить на их основе эффективные методы. Так называемые регулярные проблемы математического программирования [49] характеризуются следующими условиями.

1. Для каждой точки области изменения аргумента целевой функции можно определить некоторым образом понятие непустой окрестности.

2. Можно указать достаточно эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия локальной экстремальности целевой функции, что позволяет рассмотреть вопрос его нахождения при помощи некоторого конечного (или бесконечного сходящегося) процесса.

3. Локальный оптимум целевой функции совпадает с глобальным.

Комбинаторные или дискретные проблемы математического программирования образуют обширный класс нерегулярных проблем. Формально они характеризуются нарушением условия 1 регулярности, а именно, область изменения решений является некоторым несвязным подмножеством евклидового пространства.

Если в решении регулярных (прежде всего линейных, а также выпуклых) проблем математического программирования достигнуты значительные успехи, то невыпуклость и несвязность дискретных проблем приводят к принципиальным трудностям, делают невозможным применение стандартных приемов „регулярного" математического программирования (продвижение из одной вершины многогранника в другую, перемещение по градиенту в окрестности данной точки и т. п.) [49]. Как правило, неприемлемы для них и методы прямого перебора или прямолинейной регуляризации посредством отбрасывания условий дискретности. Обсуждение и анализ более приемлемых методов регуляризации дается в [49].

2. Идея исследуемых нами *алгоритмов комбинаторной регуляризации* состоит в систематическом выявлении общих свойств входных-выходных множеств исходной комбинаторной проблемы с целью формирования единообразных способов анализа и принятия решений в них.

Комбинаторность проблем, как уже говорилось в § 1.1, выражается в отсутствии или недостаточной эффективности априорных данных о природе, общих свойствах и взаимосвязях в множествах входных-выходных записей. Комбинаторность может быть как следствием недостаточной исследованности проблемы, так и отражать ее истинную неустранимую сущность. В последнем случае, если решение проблемы недоступно полным перебором вариантов, как пра-

вило, прибегают к изменению постановки проблемы, изменению критериев качества решений и т. п.

Наши исследования относятся к методам решения проблем, комбинаторность которых, по предположению, является следствием их недостаточного познания. Тем самым методы систематического устранения комбинаторности приобретают также смысл познавательных методов.

Произвольный алгоритм комбинаторной регуляризации определяется заданием генераторов решений индивидуальных задач, списком правил преобразования алгоритмов, предназначенных для решения исследуемой проблемы, или операторов, а также схемой применения генераторов и операторов.

Указанные генераторы могут быть основаны на извлечении решений индивидуальных задач из заданных списков или текстов, непосредственном синтезе этих решений и др.

В список операторов включаются, в частности, следующие.

Оператор *обобщения индивидуальных решений* (индукции) по заданным входным записям и решениям в них строит окрестности входных записей и решений. Оператор *связывания входных записей* по заданному множеству входных записей выделяет множества входных записей, преобразуемых в исходные. Оператор *накопления закономерностей* принимает решение о включении некоторой закономерности из заданного списка в тезаурус, о ее местоположении, структуре представления, порядке извлечения и т. п. Оператор *оптимизации закономерностей* детерминирует, уточняет правдоподобие заданных закономерностей, компактизирует их записи, оптимизирует алгоритмы распознавания их применимости и т. п.

Возможны также операторы оптимизации *алгоритмов распознавания* наиболее релевантной закономерности из заданного списка, *планирования* путей перехода к наиболее исследованным окрестностям, *координации* действий между непосредственной генерацией и поиском решений индивидуальных задач в тезаурусе и др.

Таким образом, в нашем представлении регуляризованные комбинаторные проблемы характеризуются следующими условиями:

1. Наличием данных об общих свойствах входных-выходных записей;

2. Наличием решений индивидуальных задач и соответствующих окрестностей входных-выходных записей с легко вычислимыми свойствами;

3. Возможностью планирования в множестве окрестностей входных записей разной степени исследованности;

4. Наличием критериев оптимального сочетания поиска решений в тезаурусе и непосредственной их генерации.

По существу алгоритмы комбинаторной регуляризации предназначены для перехода от исходной комбинаторной проблемы L к эквивалентной, но с более эффективными методами решения. Формаль-

ным же результатом этого перехода может быть построение более эффективного алгоритма решения L. В последнем случае указанные алгоритмы являются решениями индивидуальных задач проблемы трансформационного синтеза (см. § 1.1) — метапроблемы относительно L такой, что множества входных-выходных записей являются алгоритмами, предназначенными для решения L, а алгоритмы регуляризации — средством трансформации указанных алгоритмов для L.

Безусловно, утверждение о сравнительно большей эффективности алгоритмов решения регуляризованных комбинаторных проблем относительно других проблем тех же классов эквивалентности требует доказательства. На пути к нему нами выделяются следующие этапы:

1. Построение комбинаторных алгоритмов, структура которых допускает различные способы алгоритмических преобразований;

2. Получение утверждений о возможности конкретных преобразователей алгоритмов быть операторами определенных типов (обобщения, связывания, выделения общих свойств, обнаружения непрерывности, метричности и т. д.);

3. Доказательство способности конкретных операторов к усилению вообще;

4. Получение условий и пределов усиления заданных алгоритмов конкретным оператором;

5. Оценка качества алгоритмов, построенных в результате регуляризации;

6. Оценка сложности регуляризации.

Другие вопросы комбинаторной регуляризации в рамках проблемы АКА будут сформулированы в § 4.

Дальнейшее исследование алгоритмов регуляризации конкретизируется применительно к проблеме-посреднику класса комбинаторных проблем управления — шахматной игре. В последующих разделах данной главы в соответствии с представлением о регуляризованных проблемах уточняются исходные предположения об общей структуре оптимальных шахматных программ, формулируются основные вопросы их построения и доказывается разрешимость шахматной проблемы АКА в классе алгоритмов, порожденном перечислением состояний компонент этих алгоритмов. Формулируются также основные выводы об известных достижениях в области АКА.

В нашем представлении эффективные комбинаторные операторы могут быть построены с использованием языка как средства создания предпосылок выявления общности, связей между окрестностями, оптимизации распознавания принадлежности к окрестностям и др. Указанные предпосылки появляются, в частности, вследствие принятого нами принципа построения описаний, при котором описания вначале строятся в рамках наличного языка (ассимиляция), и только в случае неудачи строятся оригинальные описания (аккомодация), которые одновременно являются средством расширения языка. Нами используется структура языков первого порядка, посредством кото-

рого в главе 5 уточняются понятия описаний, целей, образов ситуаций как механизмов выделения окрестностей, понятия закономерностей как основных средств связывания окрестностей и перехода от заданных входных записей к уже исследованным и др. Определяются соответствующие проблемы синтеза, а также алгоритмы, использующие указанные структуры знаний и способные к трансформации.

В главе 6 обсуждаются эксперименты по выделению решений индивидуальных задач из шахматных текстов, программы и эксперименты вычисления правдоподобия закономерностей типа „если дана позиция P, то цель F достижима в ней".

Результаты экспериментов по оптимизации алгоритмов планирования, усилению шахматных программ при заданном списке операторов, синтезу P-стратегий и их обобщению, которые проводятся в настоящее время, предполагается опубликовать по мере их завершения.

§ 2. Об исследуемом классе комбинаторных проблем

Наши дальнейшие исследования относятся к проблеме адаптации комбинаторных алгоритмов управления, а точнее, алгоритмов, предназначенных для решения модельного представителя проблем комбинаторного управления—шахматной игры (ПОУ^{ш}).

Теоретическое и в то же время практически полезное изучение методов решения проблем комбинаторного управления (ПОУ) возможно при наличии адекватного формального описания, в котором были бы отражены существенные характеристики возможных при решении ПОУ процессов, законы их протекания, основные связи между множествами ситуаций и соответствующих управлений и возмущений. Пример таких формальных описаний для определенных классов проблем дают дифференциальные уравнения (ДУ) [102]. Можно указать следующие характерные черты этих описаний: 1) ДУ являются символической моделью класса проблем, в которой отражены существенные черты этого класса; 2) ДУ являются основой для построения теории ДУ; 3) для каждой проблемы вопрос описания через ДУ с целью последующего применения методов теории ДУ решается индивидуально; 4) ДУ как язык позволяют оценивать и сравнивать с помощью теории ДУ различные методы решения представимых через ДУ проблем; 5) ДУ дают возможность концентрации усилий исследователей, служат единым языком их общения.

Для интересующего нас класса ПОУ описаний с указанными выше свойствами либо нет, либо они слишком сложны для чисто теоретического их изучения. Это справедливо также для ряда формально поставленных ПОУ, в частности, для игровых.

Выбор ПОУ^{ш} для данной стадии исследований ПОУ основан на идее использования проблем-посредников (ПП) для класса сходных в определенном смысле проблем. Суть идеи в том, что из класса

близких по ряду существенных характеристик проблем выбирается некоторый типичный представитель, который призван быть в определенном смысле посредником при оценке, сравнении и расширении области применения методов, создаваемых для отдельных проблем рассматриваемого класса, в том числе и различных эвристик. Предполагается, что каждый метод интерпретируется для *проблемы-посредника*, сверяется с другими аналогичными методами и оценивается. Оптимальные методы, найденные таким образом, вновь ретранслируются для индивидуальных проблем класса.

Указанный подход не нов. Он издавна применяется в экспериментальной биологии и медицине, где исследования ведутся на сложных объектах, также не имеющих адекватных формальных моделей. Живые системы решают проблемы, сходство которых в том, что ситуации—состояния популяции и среды, цель—выживание, управления задаются механизмами регуляции и адаптации популяции, а возмущения определяются изменениями состояний внешней среды (в частности, регулируются экспериментатором).

Исследуя методы решения проблем указанного класса для конкретных, заранее выделенных представителей живых систем (кроликов, лягушек, дрозофил и др.), биолог по существу оперирует с ПП и стремится с их помощью получить общие результаты для всего класса проблем.

Отметим, что вышеуказанные свойства 2) — 5), полученные на примере дифференциальных уравнений, по существу выполнены также для ПП. Свойство 1) верно лишь частично: ПП может служить символической моделью, поскольку ряд ее характеристик является общим для некоторого класса проблем; с другой стороны, ПП содержит много специфичного, несущественного для других проблем. Трудность в том, чтобы исследования концентрировались на общих для класса проблем элементах ПП.

В информатике и теории оптимального комбинаторного управления в качестве ПП целесообразно выбрать формально поставленную проблему, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) быть представителем достаточно большого и практически интересного класса проблем;

2) иметь потребность в развитом информационном обслуживании;

3) быть доступной исследователю в целом, как некая замкнутая система с заданными множествами возможных ситуаций, управлений, возмущений и целевых объектов, в частности, допускать моделирование на ЭВМ в виде единого объекта исследования;

4) быть по возможности общедоступной;

5) позволять многократное воспроизведение всех этапов решения;

6) быть сравнительно известной и располагать достаточным фактическим материалом по разным попыткам ее решения,

7) иметь регулируемую сложность процесса решения, т. е.

допускать представление в виде совокупности совместных подзадач той же природы, но меньшей сложности и в целом дающих решение основной проблемы;

8) допускать возможность регулирования сложности стратегий возмущения.

Возможны различные уточнения перечисленных выше требований к ПП, в основном связанные с формализацией первого из них — представлять достаточно большой и практически интересный класс проблем.

Приведем пример такой формализации.

Пусть $\mathcal{T}=\{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p\}$ — исследуемое множество ПОУ, F_i — множество всех упорядоченных по эффективности алгоритмов поиска управлений (АПУ) в ПОУ Γ_i, при $i=0, 1, \ldots, p$, и для ПОУ Γ_0 выполнены требования 2)—8).

ПОУ Γ_0 назовем *проблемой-посредником* для множества $\mathcal{T}$, если можно построить частичные отображения

$$T_1 : \bigcup_{i=1}^{p} F_i \to F_0 \text{ и } T_2 : F_0 \to \bigcup_{i=1}^{p} F_i$$

такие, что выполнены следующие условия:

1. Для произвольных АПУ f и g, $f \in \bigcup_{i=1}^{p} F_i$, $g \in F_0$, $T_1(f)$ определено и $T_1(f)=g$ тогда и только тогда, когда определено $T_2(g)$ и $T_2(g)=f$. Легко видеть, что если F_{i0} и F_{0i}, при $i=1, 2, \ldots, p$, обозначают множества тех элементов F_i и F_0 соответственно, для которых определены отображения $T_1 : F_i \to F_0$ и $T_2 : F_0 \to F_i$, то $T_1(F_{i0})=F_{0i}$ и $T_2(F_{0i})=F_{i0}$.

2. Множество F_{i0} является большинством в F_i [21].

3. Множества F_{i0} и F_{0i} изоморфны относительно упорядоченностей, определенных в F_i и F_0.

Условие 1 обеспечивает однозначность при переходе от ПП к другим задачам из $\mathcal{T}$, и наоборот. Из условия 2 следует, что АПУ, исследованные на ПП, в большинстве случаев имеют аналоги в каждой из проблем $\mathcal{T}$. Требование 3 позволяет утверждать, что результаты сравнения АПУ или их элементов, полученные на ПП (проблемах из $\mathcal{T}$) в области определенности отображения T_2 (T_1), будут верны и после их отображения на проблемы из $\mathcal{T}$ (ПП). Можно построить и другие формальные определения ПП, ослабляя требования 1—3, либо накладывая специальные ограничения на множество $\mathcal{T}$. При этом во всех сравнительно работоспособных определениях по меньшей мере предполагается, что список ПОУ $\mathcal{T}$ заранее задан и каждая проблема из $\mathcal{T}$ достаточно точно описана.

На данном этапе исследований большинство практически важных проблем, по своей природе относящихся к ПОУ, не формализованы и поэтому их точное сравнение указанным выше способом не представляется возможным. Определения, аналогичные приведенному вы-

ше, в лучшем случае отражают наше представление об идеальном ПП и вряд ли могут быть сейчас полезны. Кажется более удобным и простым выбрать некоторую проблему из ПОУ, удовлетворяющую требованиям 2)—8) для ПП, а затем группировать вокруг нее другие проблемы так, чтобы она являлась бы для них посредником. Наши исследования предполагают последний подход к выбору ПП, а именно, из класса ПОУ выбрана ПОУ^{ш}, для которой, как не трудно убедиться, требования 2)—8) к ПП выполнены. Можно полагать, что эти требования в определенной мере уточняют образное высказывание В. А. Кронрода о том, что „шахматы являются дрозофилой искусственного интеллекта".

Вышеизложенное позволяет выделить в проводимых нами исследованиях ПОУ следующие два метода.

I метод: 1) построение общих моделей, связанных с ПОУ; 2) формирование гипотез относительно свойств модели; 3) доказательство (опровержение) гипотез на основе анализа модели.

При этом анализ понимается в широком смысле, в частности, посредством ЭВМ.

II метод: 1) выбор проблемы-посредника из класса ПОУ (у нас ПОУ^{ш}); 2) формирование гипотез относительно свойств ПОУ^{ш}; 3) доказательство (опровержение) гипотез; 4) обобщение результатов для других представителей ПОУ.

При II методе анализ гипотез, как правило, проводится посредством ЭВМ.

Выбор последнего метода объясняется слабостью современной теории решения комбинаторных проблем, что приводит к необходимости предварительного детального анализа методов решения отдельных представителей этого класса. Об этом в [68, с. 9] справедливо отмечено, что „хорошие теории редко развиваются не на основе хорошо понятых реальных проблем и частных случаев". Анализ частных случаев характерен для начальной стадии развития теорий вообще. Этим можно объяснить тот факт, что большинство известных в настоящее время результатов по актуально σ-неразрешимым комбинаторным проблемам получены для индивидуальных проблем этого типа, в частности, для ПОУ^{ш}, ПВ$_n$, NP-полных проблем и др. После накопления достаточно богатых фактических данных они будут обобщены до уровня теории и тем самым получат предсказывающую силу. В частности, результаты, полученные для ПОУ^{ш}, смогут быть распространены на ПОУ в целом, а в дальнейшем и на другие комбинаторные проблемы. Этот оптимизм можно подкрепить следующим разделяемым нами мнением из [12] о том, что „различные попытки создания эффективных программ для отыскания решений больших комбинаторных задач обнаруживают общность основных подходов и методов".

Отметим, что шахматы обладают также многими другими особенностями, не связанными с их ролью ПП. В частности, шахматы

являются примером формальной теории для определенной предметной области. Исследования шахмат в этом смысле можно считать метатеоретическими. В частности, к ним относятся анализы партий, доказательства тех или иных возможностей, шахматный язык и др.

Можно напомнить также известную аналогию между шахматной борьбой и стремлением живых систем к выживанию. Эта сторона шахмат особенно привлекала Э. Ласкера, не только как шахматиста, но и как математика-философа [55].

Действительно, если у живых существ цель—это максимальная устойчивость к внешним изменениям среды, сохранение себя, выживание, то в шахматах это выигрыш. Как в первом, так и во втором случае ситуации оцениваются по их способности быть полезными основной цели. В обоих случаях нет практически выполнимых и абсолютно точных критериев оценки. Прямые методы оценки ситуаций связаны с риском гибели или проигрыша и потому приходится прибегать к способам, основанным на косвенной информации о полезности ситуаций, к их распознаванию. Как в жизни, так и в шахматах число ситуаций слишком велико и их использование через простое запоминание невозможно. Решению должно предшествовать их классифицирование.

Указанные общие стороны шахмат и живых систем могут при исследованиях привести к полезным ассоциациям.

Ясно, что вопросы, исследуемые на ПП, по меньшей мере полезны для решения самой ПП.

Отметим также, что проблемы, поставленные для экспериментальных робототехнических систем типа „глаз-рука", самоходные тележки с устройствами восприятия и др. [40] по существу являются ПП для класса проблем по взаимодействию со сложной средой в реальном масштабе времени. Некоторые из них сравнительно успешно разрешаются (в частности построение манипуляторов).

В то же время использование роботов в качестве орудия систематического исследования проблем информатики и теории оптимального комбинаторного управления затрудняется тем, что эксперименты на роботах связаны со сложным техническим конструированием, а решаемые с их помощью проблемы, в отличие от шахмат, не имеют достаточно точных постановок.

§ 3. Исходные предположения о структуре оптимальных комбинаторных алгоритмов поиска управлений

1. В последние два десятилетия интенсивность исследований ПОУ^{ш} сильно возросла. Тем не менее в настоящее время объем фундаментальных достижений в решении этой проблемы весьма мал и характеризуется не только отсутствием знания оптимальных алгоритмов, но и отсутствием окончательных оценок сложности для них.

Указанные исследования ПОУ^{ш} могут иметь следующие исходы:

1) будут получены оценки сложности оптимальных алгоритмов, которые приемлемы для практической реализации этих алгоритмов;

2) вышеуказанные оценки опровергнут возможность реального построения оптимальных алгоритмов.

В первом случае естественным продолжением исследований будет построение оптимального алгоритма, после чего ПОУ^{ш} исчерпает себя. Во втором случае мы должны будем смириться с чрезмерно высокой сложностью ПОУ^{ш} и приближенным характером решения ее индивидуальных задач.

В настоящее время ни одна из указанных точек зрения не имеет достаточного обоснования. В пользу второй возможности говорят не только факты большой сложности известных переборных алгоритмов и накопленный отрицательный опыт шахматистов, но также аналогии между ПОУ^{ш} и другими сложными комбинаторными проблемами, в частности, с проблемой поиска вывода.

Доводом в пользу второй возможности служит также то обстоятельство, что если бы даже в каждой позиции P был известен оптимальный в ней ход c_P и решение индивидуальной задачи ПОУ^{ш} производилось бы перебором в множестве пар $\langle P, c_P \rangle$, то о сложности перебора может дать представление оценка числа позиций из [134], которая превышает $\frac{64!}{32!\,(2!)^2\,(8!)^2} > 10^{43}$. При времени сравнения с одной позицией, равной 10^{-9} сек, т. е. при скорости ЭВМ порядка миллиард операций в секунду, потребуется не менее 10^{34} сек, или $\sim 10^{28}$ лет, для выбора релевантной к позиции запроса.

С другой стороны, надежда на исход первого типа окончательно не утеряна. Действительно. Используем высказанное в [24] замечание о том, что число r возможных передвижений различных фигур во всевозможных позициях много меньше этих позиций. Поскольку r не превышает суммы допустимых для каждой фигуры перемещений со всевозможных исходных клеток пустой доски, то можно показать, что $r \leqslant 43\,732$ [24].

Примем за основу модель К. Шеннона, согласно которой максимальное уменьшение энтропии при выборе из m равных возможностей равно $\log m$. Тогда наш оптимизм в точном решении ПОУ^{ш} можно выразить посредством следующей гипотезы 1 о строении и сложности оптимального алгоритма f^*:

1. f^* основан на подпрограммах поиска оптимального для заданной позиции управления из заданного множества записей W;

2. Множество W содержит все оптимальные в ПОУ^{ш} управления и состоит в основном из них;

3. Алгоритм f^* и W такие, что выбор оптимального управления в произвольной позиции распознается за не более чем $\log r$ шагов, где r имеет порядок числа всевозможных допустимых передвижений фигур.

Данное представление о строении оптимального АПУ в наших

дальнейших исследованиях ПОУ^{ш} принимается за исходное. В то же время отсутствие в настоящее время приемлемых алгоритмов для точного решения подавляющего большинства индивидуальных задач ПОУ^{ш} вынуждает отнести эту проблему к актуально σ-неразрешимым, что и будет предполагаться в дальнейшем. Поэтому ПОУ^{ш} будет рассматриваться нами в приближенной постановке, т. е. при операторе качества алгоритмов, равном среднему отклонению решений от оптимальных при фиксированной временной сложности, равной $\alpha \cdot t_{\rho}$ (см. § 4.1).

Итак, наше представление об α-оптимальном АПУ основано, в частности, на гипотезе 1, сформулированной выше и непосредственно связанной с нашими представлениями о регуляризованных комбинаторных проблемах, приведенными в § 1. Для конкретного выбора исходного АПУ и выработки критериев его оптимизации детализируем и приведем эти представления к более конструктивному виду. В соответствии с ними ниже будет определен класс исследуемых в дальнейшем алгоритмов.

2.1. Поиск в множестве записей предполагает заданным определенную структуру их хранилища—тезауруса. Определение тезауруса в заданных алгоритмическом языке Я и знаковой системе З было дано в § 1.1.

Введенное нами определение тезаурусов, так же как и в [138], имеет смысл формального описания накопленного некоторой системой опыта о внешнем мире. Представляется, что отличие этих определений, в основном, в выборе языка и уровне детализации описания.

При рассмотрении динамики работы систем с тезаурусами мы полагаем, что тезаурусы способны к изменению своего содержимого.

Указанное предположение означает, что тезаурус θ будет определяться в каждый из дискретных моментов времени t своим содержимым и его упорядочением, или состоянием $\theta(t)$.

Мы фиксируем возможный порядок расположения записей в тезаурусах. Для удобства описания этого порядка мы представим тезаурус в виде множества носителей информации—полей.

Каждое поле имеет свой номер и в поле может содержаться только одна запись. Номера полей задаются через пары (i, j), $i, j=0, 1, 2, \ldots$, которые древесно упорядочены следующим образом.

Для произвольных номеров (i, j) и (k, l), если $j=l=0$, то при $i<k$, $(i, j)<(k, l)$; если $i=k$, то при $j<l$, $(i, j)<(k, l)$; в остальных случаях номера несравнимы.

Предполагается, что в каждый момент t тезаурус содержит только конечное множество полей—поддерево с вершиной $(0, 0)$. Однако по каждой ветви число полей может неограниченно наращиваться в соответствии с используемыми алгоритмами.

Заметим, что данное определение тезауруса позволяет рассмат-

ривать его как разновидность текстов с древесным типом синтаксической схемы.

2.2. Подпрограммами алгоритма будем называть выделенные его части (блоки) с определенными функциональными назначениями, т. е. реализующими отображения заданных типов.

Гипотеза 1 предполагает наличие в тезаурусе всех оптимальных в ПОУ^{ш} управлений. В реальных АПУ это условие далеко от выполнения. Поэтому в них должна быть предусмотрена подпрограмма поиска этих управлений в других источниках, в частности, для каждой заданной позиции P должна решаться проблема ПСГ$^{ш}_{0}$. Она отличается от сформулированной в § 1.2 проблемы поиска в графе игры наиболее близкой к выигрышной P-стратегии, или ПСГ^{ш}, главным образом понятием оптимального алгоритма. В ПСГ$^{ш}_{0}$, в отличие от ПСГ^{ш}, оно зависит от других подпрограмм алгоритма решения ПОУ^{ш} и определяется из условий оптимизации этого алгоритма в целом. Уточнение оптимального в ПСГ$^{ш}_{0}$ алгоритма будет проведено ниже, после описания всех других компонент, исследуемых при решении ПОУ^{ш} алгоритмов.

2.3.1. Согласно детализованной гипотезе 1 исходный АПУ f_0 содержит подпрограмму f_{01} поиска оптимальных управлений в заданном тезаурусе. Если для данной позиции P такого управления в тезаурусе нет, то посредством подпрограммы f_{03}—координатора, согласующего последовательность работы всех подпрограмм f_0 и их взаимодействие с объектом управления, происходит обращение к подпрограмме f_{02}—синтеза P-стратегий. Выходная запись f_{01} и в этом случае может оказаться полезной при построении P-стратегии, так как может нести информацию, хотя и неполную, для точного указания P-стратегии, но тем не менее сужающую область его поиска. Другими словами, она может описывать некоторую причинно-следственную связь между искомой P-стратегией и входными данными, в частности, позицией P. Уточним это представление.

2.3.2. Запись w назовем *знанием о позиции P относительно* АПУ f, или $\langle P, f\rangle$ *знанием*, если при замене входной позиции P на запись $w*P$ и при прочих равных условиях изменение значения оператора качества f отлично от нуля.

Запись w назовем *знанием относительно* АПУ f, если существует позиция P такая, что w есть $\langle P, f\rangle$ знание.

Знание w назовем *положительным*, если добавление записи w к P приводит к усилению f, и *отрицательным*, если эта операция ослабляет f относительно заданного упорядочения на множестве АПУ.

Если запись w не является знанием относительно заданного АПУ, то о ней будем говорить также, как о *пустом* знании.

В дальнейшем нас будут интересовать только положительные знания, именуемые просто знаниями.

Будем говорить, что $\langle P, f\rangle$ *знание* w_1 *релевантнее* $\langle P, f\rangle$ *знания* w_2 *относительно* АПУ f, если добавление записи w_1 к P

(конкатенация $w_1 * P$) приводит к большему усилению f относительно заданного оператора качества, чем добавление к P записи w_2.

Произвольное $\langle P, f \rangle$ знание из заданного множества записей W, при котором достигается наибольшее усиление f, назовем *максимально релевантным к P знанием из W* относительно f при заданном операторе качества алгоритмов.

Ясно, что при фиксированных АПУ f_{02} для синтеза P-стратегий и координаторе f_{03} оптимальный алгоритм f_{01} поиска знаний в тезаурусе должен быть таким, чтобы при заданном ограничении α на среднее время максимизировать релевантность извлекаемых знаний на возможно большем числе позиций. Более точно для алгоритма f_0 должна решаться следующая *проблема локальной оптимизации накопления, организации и поиска записей в тезаурусе* (НОПТ^{ш}):

При заданных α, координаторе f_{03} и АПУ f_{02} для ПСГ$_0^{ш}$ выбрать множество записей W', построить тезаурус $\theta'(W')$, алгоритм f_1' поиска из $\theta'(W')$ записей по произвольной заданной позиции P такие, что для произвольной другой пары $\langle \theta(W), f_1 \rangle$, того же назначения было бы справедливо следующее неравенство:

$\langle \rho, f' \rangle$ СКС $\leqslant \langle \rho, f \rangle$ СКС, где f' и f—АПУ вида $\langle \theta'(W'), f_1', f_{02}, f_{03} \rangle$ и $\langle \theta(W), f_1, f_{02}, f_{03} \rangle$ соответственно.

При этом извлекаемые из тезауруса записи должны быть, вообще говоря, знаниями о позициях.

Пару $\langle \theta'(W'), f_1' \rangle$ будем называть *α-оптимальной* в НОПТ^{ш} *относительно* f_{02} и f_{03}. Ясно, что для этой пары не предполагается извлечение из W' максимально релевантных знаний для каждой входной позиции. Наряду с оптимизацией по этому критерию выбор $\langle \theta'(W'), f_1' \rangle$ зависит от соотношения α и времени, необходимого для поиска оптимального управления в графе игры и тезаурусе.

Аналогичным образом формулируются проблемы локальной оптимизации f_0 при изменении АПУ f_{02} (ПСГ$_0^{ш}$), либо координатора f_{03}(ПК^{ш}). В частности, в ПСГ$_0^{ш}$ при фиксированных α, $\theta(W)$, f_{01} и f_{03} требуется построить АПУ f_2', при которой четверка $\langle \theta(W), f_{01}, f_2', f_{03} \rangle$ задает АПУ f', наиболее близкий к α-оптимальному при всевозможных вариациях f_{02}. Подчеркнем, что входными словами f_2 являются конкатенации $w * P$, где P—анализируемая позиция, а w—выходная запись f_{01} при входе P. При локальной оптимизации f_0 посредством варьирования координатора f_3 фиксированными предполагаются подпрограммы f_{01} и f_{02}, тезаурус $\theta(W)$, α, а также некоторые схемы взаимодействия указанных компонент между собой и объектом управления. К ним относятся определенная очередность в получении информации от ситуаций и оказание управляющего воздействия (очередность хода белых и черных в шахматах), приоритет в обращении к f_{01} и др.

Отметим, что при принятии гипотезы 1 и наличии в W всех оптимальных управлений НОПТ^{ш} является одним из возможных представлений ПОУ^{ш}. Если же W неполно, то НОПТ^{ш} является существенной подзадачей ПОУ^{ш}.

Отметим также, что можно получить верхнюю границу мощности множества классов однотипных записей в W, если заданы допустимое время τ_1 выдачи ответа на запрос и минимальное время τ_2 одной проверки. Так, при последовательной проверке она будет иметь порядок τ_1/τ_2. Границы для τ_1 определяются исходными условиями проблемы, а τ_2 можно задать исходя из возможностей вычислительной техники. Правдоподобно, например, считать τ_2 не более 10^{-10} сек, т. е. времени протекания событий на атомном уровне [142].

3. Вышеизложенное позволяет сформулировать следующие требования к произвольному исходному АПУ f_0:

1. f_0 решает ПОУ^{ш} в приемлемое для заданных практических условий среднее время, равное αt_ρ;

2. f_0 имеет тезаурус $\theta(W)$, содержащий множество знаний о ПОУ^{ш};

3. f_0 включает подпрограмму f_{01} для поиска знаний в тезаурусе, обращение к которой при поступлении очередной входной позиции происходит, как правило, в начале работы f_0;

4. Если поиск в тезаурусе при заданной входной позиции P дает знания, недостаточные для непосредственного указания хода в P, то в f_0 происходит обращение к подпрограммам поиска оптимального в P управления в других множествах, отличных от множества записей тезауруса и заранее фиксированных типов, в частности, происходит обращение к подпрограмме f_{02}—синтеза P-стратегий.

5. Алгоритм f_{02} выбирается таким, чтобы оптимальный в произвольной позиции P ход был бы максимально релевантным $\langle P, f_{02}\rangle$ знанием;

6. Взаимосвязи f_{01} с f_{02} и f_0 с объектом управления реализуются подпрограммой f_0—координатором f_{03}.

Эти же требования определяют класс АПУ $\mathscr{B}_1$, которому, по предположению, принадлежит α-оптимальный. Класс $\mathscr{B}_1$ есть подмножество F_ρ-класса всех АПУ, получаемых при всевозможных вариациях $\theta(W)$, f_{01}, f_{02}, f_{03}. Таким образом предполагается, что α-оптимальный АПУ f^* удовлетворяет условию

$$\langle\rho, f^*\rangle\text{СКС} = \min_{f\in\mathscr{B}_1}\langle\rho, f\rangle\text{СКС}.$$

Проблема построения f^*, несмотря на введенные допущения, тем не менее остается трудной. На пути к ее решению в дальнейшем рассматриваются вопросы локальной оптимизации исходного АПУ, в частности, построения оптимальной в НОПТ^{ш} пары $\langle\theta'(W'), f_1'\rangle$ при фиксированных α, f_{02}, f_{03}. С этой целью в § 8.5 будет описан класс АПУ $\mathscr{B}_{11}$, $\mathscr{B}_{11}\subseteq\mathscr{B}_1$, позволяющий комплексно использовать записи для представления знаний при поиске оптимальных управлений. После выбора исходного АПУ и определения типов этих записей будут рассмотрены вопросы их алгоритмического синтеза и построения на их основе методов оптимизации исходных алгоритмов.

§ 4. Вопросы теории адаптации комбинаторных алгоритмов

1. Как уже отмечалось, наши дальнейшие исследования направлены на решение проблемы АКА, в частности, построение для заданных разрешающих процедур усилителей максимальной кратности применения. Соответствующая теория должна выявить принципиальные возможности алгоритмов адаптации и указать области их наиболее перспективного поиска. Развивая и дополняя высказанные в § 1 идеи комбинаторной регуляризации, конкретизируем некоторые ожидаемые результаты и актуальные проблемы теории АКА в рамках ПОУ^{ш}.

2. Выделим типы операторных алгоритмов—преобразователей АПУ, в множестве которых будет производиться поиск усилителей.

Согласно допущениям, схема алгоритмов, описанная в § 3, является основой определения исследуемого нами класса АПУ $\mathscr{B}_1$. А именно, к этому классу относится произвольный АПУ со схемой, полученной из исходной (быть может) посредством удаления отдельных подпрограмм координатора, алгоритмов поиска в графе игры или в тезаурусе, а также конкретизацией всех указанных в выделенной подсхеме алгоритмов и тезауруса. Детальная схема подкласса $\mathscr{B}_{11}$, $\mathscr{B}_{11} \subseteq \mathscr{B}_1$, полученная после уточнения исследуемых нами структур записей тезауруса—формальных аналогов знаний шахматистов, будет приведена в § 8.5. Она и послужит основой наших конкретных рассмотрений. Теперь же, в рамках класса $\mathscr{B}_1$, можно выделить преобразователи АПУ, основанные на следующих принципах:

1) на замене некоторой подпрограммы в исходном АПУ другой, такого же назначения,

2) на расширении (сужении) исходной схемы в рамках класса $\mathscr{B}_1(\mathscr{B}_{11})$,

3) на расширении (сужении) списков записей определенного типа, используемых при работе подпрограмм исходного АПУ; в частности, это могут быть перечисленные в § 7.5 типы записей, относимые к типам знаний,

4) на изменении организации записей тезауруса (их классификации, переупорядочении и др.).

Предполагается, что указанные операторные алгоритмы оставляют преобразованные АПУ в рамках класса $\mathscr{B}_1$ ($\mathscr{B}_{11}$). Возможное усиление, полученное этими преобразователями, можно сопоставить с обучением живых организмов в рамках генетически обусловленной структуры—схемы алгоритмов. В то же время несомненный интерес представляет исследование усилителей, существенно преобразующих схему исходного АПУ. Их аналогом, видимо, являются механизмы мутаций, изменяющих генетический код организма.

3. В теории АКА должны быть отражены принципиальные возможности отдельных типов преобразователей при усилении исходных алгоритмов. В частности, представляются правомерными следующие утверждения.

3.1. Расширяя специальным образом множество записей тезауруса W, можно локально оптимизировать исходный АПУ. Такого рода адаптация может быть уточнена в рамках решения НОПТ^{ш} следующим образом.

Пусть подпрограммы f_{02} и f_{03} исходного АПУ $f_0 = \langle \theta(W_0), f_{01}, f_{02}, f_{03} \rangle$ фиксированы и на i-ом шаге итерации при некотором заданном множестве записей тезауруса W_i АПУ имеет вид $f_i = \langle \theta(W_i), f_{i_1}, f_{02}, f_{03} \rangle$.

Утверждение $\exists i^* \forall i((0 < i \leqslant i^* \to \exists W_i(W_{i-1} \subset W_i \& f_i > f_{i-1}) \& \& (i > i^* \to \forall W_i(f_i \leqslant f_{i^*})))$.

3.2. Представляют интерес не столько общие утверждения о возможности усиления посредством наращивания и специальной организации тезауруса, сколько указания о конкретных структурах записей тезауруса, ответственных за усиление. В главе 6 будет описан ряд структур представления знаний, в частности, целей, планов, закономерностей, отношений выигрышности, цель-подцель и др. Утверждения о свойстве этих структур быть знанием относительно заданных алгоритмов поиска в графе игры могут иметь следующий вид.

Утверждение. *Пусть* $f_1 = \langle \theta(W_1), f_{11}, f_{12}, f_{13} \rangle$ — *оптимальный в НОПТ^{ш} АПУ при заданном* W_1. *Тогда существует АПУ* $f_2 = \langle \theta(W_2), f_{21}, f_{12}, f_{13} \rangle$ *такой, что он отличается от* f_1 *только изменением в* W_1 *записей типа* x *и соответствующим изменением* f_{11}, *но при этом* $f_2 > f_1$.

Изменения в W_1 могут относиться как к содержанию записей типа x, так и просто к их количеству или организации.

Аналогичные утверждения должны быть справедливы относительно локальных изменений подпрограмм f_{01}, f_{02}, f_{03} при фиксированных других компонентах.

3.3. Известный интерес вызывает исследование усилительных возможностей закономерностей—записей типа $u \Rightarrow v$, интерпретируемых как указание о причинно-следственной связи между выполнением в данной ситуации условий u и возможностью достижения в ней результатов v. Например, в теории поиска логического вывода закономерности задаются, в частности, посредством допустимых правил. Правило вывода называется допустимым в исчислении $\mathcal{P}$, если добавление этого правила в $\mathcal{P}$ не расширяет объем выводимых слов. В [62] (см. также § 5) доказана теорема о возможности линейного уменьшения длин доказательств слов, выводимых в исчислениях общего типа посредством наращивания множества допустимых правил. По существу это теорема о существовании усилителей для алгоритмов поиска логического вывода, основанных на пополнении тезауруса закономерностями. При этом условия работы алгоритмов вывода идеализированы в том смысле, что время поиска закономерностей в тезаурусе не принимается во внимание.

Продолжая начатое в § 4.1, сравнение методов решения комбинаторных проблем в приближенной постановке и проблемы аппрок-

симации функций, отметим, что добавление нового члена ряда в аппроксимирующий отрезок, вообще говоря, изменяет структуру всей приближенной функции, что, в частности, может увеличить сходство с истинными значениями функции для каждого из аргументов. Такому усилению в ПОУ^{ш} соответствует усиление через изменение процедур решения ПСГ$^{ш}_{0}$, НОПТ^{ш}, списка целей и др. В то же время усиление через введение закономерностей направлено на уменьшение отклонений от оптимальных решений только для отдельных классов аргументов (позиций), именно тех, к которым применим распознаватель закономерности. Отметим также, что, как и в теории аппроксимации, при усилении АПУ возникают вопросы упорядочения элементов, связанных с усилением (упорядочение членов ряда по их полезности) выбора оптимального порядка их использования (вопросы быстрой сходимости ряда) и др. Представляется, что использование такого рода аналогий с методами аппроксимации может служить ориентиром при развитии теории АКА.

3.4. Возможность использования тех или иных типов записей, в частности закономерностей, при усилении алгоритмов тесно связана с выделением их из тезауруса в минимальное время. Это в свою очередь предполагает оптимальность конструкций поисковых образов записей и их организаций, алгоритмов поиска записей и др. Для случая закономерностей в ПОУ^{ш} в идеальном случае, т. е. при выполнении гипотезы 1, выбор искомого поискового образа должен происходить за $\log r$ шагов, где r число поисковых образов, с каждым из которых ассоциировано некоторое оптимальное перемещение фигур. Надо полагать, что каждый поисковый образ является описанием некоторого множества позиций и процедура распознавания позиций, т. е. выявления принадлежности к некоторому образу, связана с определенным числом вычислений. Чем проще распознается принадлежность позиции к некоторому образу, тем лучше при прочих равных условиях алгоритм поиска. Ясно, что если описание образа представлено через список выделяемых им позиций, то распознавание будет предельно сложным. В то же время описание через значения малого числа признаков может обеспечить распознавание с малой временной сложностью.

Весьма правдоподобно, что классы позиций с одинаковым перемещением фигур, о которых говорилось в § 3, могут не иметь простых (относительно распознавания) описаний ввиду того, что по этому принципу в один и тот же класс попадут весьма разнородные позиции. В то же время предлагаемый нами в § 4.5 принцип объединения позиций в классы через их описание в виде $\langle F, l\rangle$-образов, надо ожидать, не будет сложным, поскольку требуется высокое сходство позиций, основанное на сохранении свойства к достижению $\langle F, l\rangle$-целей при фиксированных $\langle F, l\rangle$, а само описание упрощается до тупикового.

В настоящее время имеются реализованные алгоритмы, предназначенные для построения $\langle F, l\rangle$-образов (см. § 5), где исходным является заданная $\langle F, l\rangle$-стратегия. В то же время алгоритмы построения образов позиций по заданному перемещению фигур в литературе не описаны. Вышеизложенное указывает на необходимость исследования сравнительных характеристик различных структур поисковых образов позиций относительно их возможностей в усилении.

3.5. Все записи тезауруса, алгоритмы, формулы, тексты, задаются в определенном языке и потому изменение языка может существенно сказаться на эффективности рассматриваемого АПУ. Утверждения об усилительных способностях языка могут иметь следующий вид.

Утверждение. *Пусть* $f_1=\langle\theta(W_1), f_{11}, f_{12}, f_{13}\rangle$ *—оптимальный в НОПТ*^{ш} *АПУ при заданном в языке* $Я_1$ *множестве записей* W_1. *Тогда существует язык* $Я_2$ *такой, что после перезаписи* W_1 *в* $Я_2$ *и соответствующем переходе от* f_{11} *к* f_{21}, *и от* W_1 *к* W_2, *алгоритм* $f_2=\langle\theta(W_2), f_{21}, f_{12}, f_{13}\rangle$ *будет сильнее* f_1.

Результаты указанного типа могут служить основой сравнительного изучения языков не только в рамках теории АКА, но также в различных областях лингвистики.

3.6. Сформулированные выше утверждения характеризуют возможности усиления в НОПТ^{ш} при конкретных организациях тезауруса и поисковых алгоритмов. При этом целесообразность использования тех или иных типов записей тезауруса рассматривается вне связи с вопросом их происхождения.

Для реальных алгоритмов адаптации вопрос об источнике записей, исследуемых на предмет быть знаниями, не может быть обойден. На определенном этапе развития алгоритмы адаптации должны включать в качестве существенных компонент те или иные подпрограммы синтеза знаний. Эти подпрограммы, вообще говоря, всего лишь предназначены для генерации определенных типов знаний, в то время как их реальные выходные записи могут весьма слабо отвечать требованиям, предъявляемым к знаниям. Поэтому для каждого алгоритма синтеза знаний должен быть исследован вопрос о том, могут ли генерируемые этим алгоритмом записи быть использованы для усиления. Например, если известно, что существует способ усиления некоторого АПУ f_0 посредством накопления в тезаурусе закономерностей заданного типа, а алгоритм ψ предназначен для синтеза этих же закономерностей, но ввиду высокой сложности проблемы выдает лишь гипотезы о них, то необходимы специальные утверждения о том, может ли быть усилен f_0 посредством накопления выходных записей ψ.

3.7. В теории АКА должны быть освещены вопросы существования и достижимости α-оптимальных алгоритмов исследуемыми методами.

Ранее было отмечено, что α-оптимальный АПУ f^*, при $0\leqslant\alpha\leqslant1$,

существует и, в соответствии с гипотезой 1, принадлежит классу $\mathscr{B}_1$. Ясно также, что среднее отклонение для α-оптимального АПУ, при $\alpha<1$, отлично от нуля. Возникает вопрос, можно ли итеративно достичь α-оптимума пользуясь заданным списком операторов. Точнее, необходимы утверждения (или их отрицания) следующего вида.

Утверждение. *Для заданного АПУ $f_0 \in \mathscr{B}_1$ и списка операторов $\omega_1, \ldots, \omega_r$ можно указать номера $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, r\}$ такие, что $\omega_{i_m} \omega_{i_{m-1}} \ldots \omega_{i_1}(f_0) = f^*$.*

Если по каким-либо критериям выбор набора таких операторов уже произведен, то можно поставить вопрос о максимальных возможностях этого набора при усилении исходного АПУ. В частности, этот набор может отражать традиционные схемы обучения шахматистов.

4. Как было отмечено в начале данного раздела, наша основная проблема состоит в построении эффективных алгоритмов АКА. Теория АКА должна способствовать построению таких алгоритмов, и в этом смысле ее роль вспомогательная. Надежда на то, что в рамках теории будут выявлены некие универсальные усилители для произвольных исходных данных, не представляется обоснованной. Трудности проблемы построения таких усилителей можно сравнить с трудностями аналогичной проблемы оптимального обучения детей, которая, несмотря на многовековый опыт педагогики, остается далеко нерешенной. В чем же, в свете сказанного, состоят основные проблемы и перспективы теории АКА? В настоящее время можно выделить следующие проблемы этой теории:

1. Классификация преобразователей и выявление их принципиальных возможностей при усилении алгоритмов (теоремы существования). По существу контуры именно этого раздела были очерчены выше.

2. Построение усилителей заданного типа, в частности, основанных на накоплении знаний. В этом случае возникают вопросы выделения структур знаний и их классификации, а также вопросы построения алгоритмов синтеза знаний заданного типа и оценки сложности их работы.

3. Оценка качества усилителей.

4. Выбор оптимальных усилителей для заданных исходных алгоритмов.

5. Построение оптимальных усилителей для разрешающих процедур в проблемах-посредниках.

6. Возможность применения методов усиления в проблемах-посредниках для других проблем соответствующего класса.

Перечень этих разделов далеко не полный и может быть пополнен как по мере развития собственно теории АКА, так и посредством переноса близких вопросов, в частности, из педагогики, генетической психологии, а также из сравнительно хорошо исследованных конкретных комбинаторных проблем.

В последующих разделах будут описаны результаты наших иссле-

дований вышеуказанных проблем АКА, а также дан обзор известных достижений в этом направлении.

5. В заключение данного параграфа отметим, что сформулированные выше проблемы относятся к адаптации алгоритмов в рамках фиксированной проблемы. Однако, как уже указывалось в § 1, можно поставить вопрос об адаптации самой проблемы. Например, если проблема представлена в форме ПРО, то адаптация ПРО может происходить посредством изменения параметров M, T', U, ρ, в частности посредством уменьшения мощности M, изменения состава элементов M, склеивания классов в T' и U, введения определенных структур для T'и др., и будет направлена к построению оптимальной ПРО, т. е. комбинаторной проблемы рассматриваемого класса проблем, имеющей наименьшую сложность в подклассе представленных в форме ПРО. Варьируемыми элементами при этом могут быть данные о классах эквивалентности, размытых классах, или классах толерантности в T', данные о частичной непрерывности или эвклидовости в U и др. Введение таких структур может позволить установить легко вычисляемые связи между алгоритмическими изменениями входных и выходных данных, т. е. регуляризовать проблему.

В теории параметрической адаптации проблема адаптируемых моделей известна как проблема идентификации [127]. В теории логического вывода [61, 63, 64] она выступает как проблема совершенствования исчислений. В последнем случае при интерпретации проблемы вывода в форме ПРО она в определенной мере покрывается рассматриваемой нами проблемой адаптации комбинаторных алгоритмов. Некоторые аспекты этой связи будут указаны в § 7.

§ 5. Турниры как метод экспериментальной оценки качества алгоритмов поиска управлений

1. Получение ответа на вопрос, является ли данный алгоритм ω усилителем алгоритма f при операторе качества алгоритмов типа среднего отклонения, связан со следующими трудностями:

1) вычисление отклонения решения каждой индивидуальной задачи от оптимальной, как правило, весьма нетривиально;

2) вычисление среднего отклонения решений от оптимальных требует как правило, оценки отклонения решений для очень большого числа индивидуальных задач;

3) в результате преобразования f посредством усилителя, изменяется, вообще говоря, отклонение каждой индивидуальной задачи, что приводит к необходимости их повторного вычисления;

4) для исследуемых нами (актуально) σ-неразрешимых проблем, в частности ПОУ^{ш}, в настоящее время отсутствуют простые математические модели, позволяющие оценить среднее отклонение чисто аналитически.

Представляется, что проблема построения практически реализуемых методов сравнения средних отклонений решений от оптимальных

на данном этапе развития теории оценивания операторов качества алгоритмов может иметь лишь частные решения для отдельных проблем. Ниже рассмотрена возможность решения указанной проблемы для ПОУ^{ш} на основе идей, используемых при организации спортивных турниров, в основном, шахматных. Определение турниров будет дано в более общей форме, чем это требуется в данном разделе, с тем, чтобы в § 4.6 рассмотреть возможность их использования при оценке эффективности систем управлений, отличных от шахматных.

2. Пусть $И$—некоторая игра двух лиц с противоположными интересами и нулевой суммой, а F—конечное множество АПУ, интерпретированных в $И$. (Понятие „интерпретированности произвольного АПУ в $И$" дано в § 4.6; здесь же оно совпадает с понятием „предназначен для решения").

Для оценки результатов игры заданной пары АПУ из F мы используем множество H специальным образом подобранных ситуаций $И$, которые используются как начальные.

Будем считать, что определен алгоритм упорядочения (*локальный*) $A_л$, который по результатам матча произвольных заданных АПУ f_1 и f_2 из $2\cdot|H|$ партий с правом первого хода для f_1 и соответственно для f_2 ровно один раз в каждой позиции из H указывает равносильны ли f_1 и f_2 ($f_1 \asymp f_2$) или f_1 выигрывает у f_2 ($f_1 \succ f_2$). Результаты матчей пар АПУ из F, выбираемых в некотором заданном порядке, определяют, в общем случае, смешанный граф с множеством вершин $\mathscr{K}'$, в котором наличие направленного ребра от вершины f_1 к f_2 означает, что f_1 выигрывает у f_2, а ненаправленное ребро означает, что они равносильны. Указанный граф назовем *графом матчей* F в $И$.

Будем говорить, что *для* АПУ F *определен турнир* $\mathscr{T}$ *с параметрами* $\langle И, H, A_л, \tau, A_п, A_г \rangle$, если выполнены следующие условия:

1. Дана игра $И$ двух лиц с противоположными интересами и нулевой суммой, для которых выполнены требования 2—8 к проблемам-посредникам из § 2.4;

2. Элементы F интерпретированы в $И$;

3. Выделено множество H начальных ситуаций в $И$ и фиксировано среднее допустимое время τ выбора управления в произвольной ситуации;

4. Задан локальный алгоритм упорядочения $A_л$, используемый при принятии решений о выигрыше или равносильности одного АПУ относительно другого;

5. Указан алгоритм $A_п$ выбора пар из F для их сравнения и построения графа матчей на множестве F;

6. Указан алгоритм упорядочения (*глобальный*) $A_г$ для перехода от графа матчей на множестве F к линейному упорядочению F.

Турнир $\mathscr{T}$ для АПУ F состоит из конечной последовательности игр пар из F, выделяемых в некотором фиксированном для данного

турнира порядке. Каждая игра начинается в одной из ситуаций H и заканчивается выигрышем одного из участников игры или их ничьей. Результатом турнира является линейное упорядочение множества F. Первый элемент этого упорядочения назовем *наилучшим в F относительно $\mathcal{T}$*, или *$\langle F, \mathcal{T}\rangle$ оптимальным*. Если АПУ f_i и f_j занимают в упорядочении места i и j соответственно, то будем говорить, что „*f_i сильнее f_j*“ ($f_i > f_j$), если $i < j$, и „*f_j эквивалентно f_i*“ ($f_i = f_j$), если $i = j$.

3. Рассмотрим возможности использования турниров при сравнительной оценке близости данного АПУ к α-оптимальному при заданном ПОУ^{ш}. Турниры являются конкретной схемой сравнения АПУ, тесно связанной с содержанием ПОУ^{ш}. Тем не менее схема сравнения посредством вычисления $\langle \rho, f\rangle$ СКС при фиксированном среднем времени вычислений определена в системе общих понятий, не предполагающих их конкретизации именно для ПОУ^{ш}. Соответствие значений $\langle \rho, f\rangle$ СКС с содержанием ПОУ^{ш} регулируется посредством выбора алгоритма сходства гипотез и истинных решений $A(\rho, h, u)$. Поскольку в ПОУ^{ш} истинными решениями являются оптимальные стратегии, то $A(\rho, h, u)$ должен оценивать сходство стратегии-гипотезы h с оптимальными стратегиями из $\rho(u)$. Его значение может быть, например, прямо пропорционально доле концевых вершин стратегии h, принадлежащих выигрышным или ничейным для белых при начальной позиции u. Стратегия h, как правило, неизвестна в полном объеме и многие ее варианты определены частично. Поэтому для оценки количества концевых вершин h типов выигрышных или ничейных имеет смысл использование оценочных функций типа Шеннона, посредством которых каждой концевой вершине x_i можно поставить в соответствие число $ОЦ(x_i)$ и вычислять $A(\rho, h, u)$ посредством „подъема вверх“ к начальной позиции по минимаксу или по формуле $\dfrac{\sum_{i=1}^{r} ОЦ(x_i)}{2m}$, где m — число концевых вершин h, а $0 \leqslant ОЦ(x_i) \leqslant 2$. Однако ясно, что использование $ОЦ(x_i)$ по существу переводит вопрос о связи $A(\rho, h, u)$ с оптимальностью h к аналогичному вопросу для $ОЦ(x_i)$, что представляется не менее трудным.

В настоящее время какой-либо приемлемый алгоритм вычисления сходства, в частности, посредством $ОЦ(x_i)$ нам неизвестен. Тем не менее при некоторых естественных предположениях, возможно оценить величину среднего сходства. Рассмотрим их.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех позиций графа игры ПОУ^{ш} и F^* — множество всех неэквивалентных (т. е. отличающихся управлением хотя бы в одной позиции) АПУ в ПОУ^{ш}. Ясно, что F^* конечно. Рассмотрим для F^* *абсолютный турнир* $\mathcal{T}^* = \langle И, H^*, A^*_л, \tau^*, A^*_п, A^*_г\rangle$, параметры которого определены следующим образом.

Пусть $a_{ij}(P)$, при $a_{ij}(P) \in \{0, 1, 2\}$, $f_i, f_j \in F^*$, есть результат партии

f_i с f_j при начальном ходе f_i из позиции P, $a_{ij}=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}} a_{ij}(P)$ и $a_i=\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j\in F^*} a_{ij}$. Тогда в $\mathcal{M}^*$ полагаем: 1) $H^*=\mathcal{P}$; 2) алгоритм $A_л^*$ такой, что $\forall f_i f_j\in F^*(f_i\succ f_j\leftrightarrow a_{ij}>a_{ji})\&(f_i\asymp f_j\leftrightarrow a_{ij}=a_{ji})$; 3) $\tau^*=\alpha\cdot t_0$; 4) алгоритм A_n^* определяет ровно один матч каждого АПУ из F^* со всеми остальными, т. е. является круговым; 5) алгоритм $A_г^*$ такой, что $\forall f_i f_j\in F^*(f_i\succ f_j\leftrightarrow a_i>a_j)\&(f_i=f_j\leftrightarrow a_i=a_j)$.

Величину a_i будем называть *абсолютным коэффициентом* АПУ f_i, $f_i\in F^*$, а место f_i относительно упорядочения $A_г^*$—*абсолютным местом* f_i.

Итак, для произвольного АПУ f_i абсолютный коэффициент

$$a_i=\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j\in F^*} a_{ij} \quad \text{или} \quad a_i=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}}\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j\in F^*} a_{ij}(P).$$

В то же время среднее сходство $A(\rho, f_i)=1-a(\rho, f_i)=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}} A(\rho, f_i, P)$, где $A(\rho, f_i, P)$ оценивает сходство стратегии-гипотезы G_p^i, порожденной f_i из начальной позиции P с оптимальной стратегией. Согласно постановке ПОУ^{ш} оптимальной P-стратегией считается такая, которая максимизирует величину $\frac{m_1(G)+2m_2(G)}{2m(G)}$ по всем $G\in G_p$, где G_p—всевозможные P-стратегии, $m_1(G)$, $m_2(G)$ и $m(G)$—число ничейных, выигрышных и всех концевых вершин G. Естественно считать, что $B(G_p^i)=\frac{m_1(G_p^i)+2m_2(G_p^i)}{2m(G_p^i)}$ может быть мерой $A(\rho, f_i, P)$.

Величина $a_{ip}=\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j\in F^*} a_{ij}(P)$ близка по своей природе к $B(G_p^i)$. Действительно, при каждом f_j значение $a_{ij}(P)$ равно исходу партии f_i с f_j. Поскольку рассматриваются всевозможные АПУ f_j, то можно считать, что доля исходов их встреч с f_i будет прямо пропорциональна числу концевых вершин каждого типа в стратегии G_p^i. Другими словами, можно считать, что существуют числа c_0, c_1, c_2 такие, что $|\{f_j|a_{ij}(P)=t\}|=c_t m_t(G_p^i)$, где $t=0, 1, 2$, и $c_0=c_1=c_2=c$, откуда следует, что $|F^*|=cm(G_p^i)$ и $B(G_p^i)=a_{ip}$.

Вышеизложенное дает основание для принятия следующей

Аксиомы 1. *Для произвольных АПУ f и позиции P сходство $A(\rho, f, P)$ стратегии-гипотезы $f(P)$ с оптимальной равно*

$$\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j\in F^*} a_{ij}(P).$$

Из аксиомы 1 непосредственно получается следующее важное для нас

Следствие. *Среднее сходство гипотез, порождаемых заданным АПУ f, равно абсолютному коэффициенту f.*

Данное следствие позволяет производить поиск методов оценки среднего отклонения $a(\rho, f)$ для ПОУ^{ш}, используя результаты матчей f с другими АПУ, что, в отличие от внутренней структуры гипотез-стратегий, представляется более измеримой характеристикой. Рассмотрим один из путей таких измерений.

4. Вычисление абсолютного коэффициента АПУ f требует сравнения f со всеми элементами из F^*, что нереально. Возникает вопрос о возможности выявления абсолютной сравнительной силы двух заданных АПУ посредством некоторых локальных сравнений этих АПУ с элементами F^*. В нижеследующей теореме указаны определенные локально проверяемые достаточные условия того, что один АПУ сильнее другого. При принятии некоторых допущений эти условия могут послужить ориентиром при экспериментальных оценках усилителей.

Пусть f_i—произвольный АПУ и i—его абсолютное место, $1 \leqslant i \leqslant m$. Для абсолютного турнира принимается следующая

Гипотеза 2 (о зонах устойчивости). *Для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant m$, существуют натуральные числа l_1^i, l_2^i, k_1^i, k_2^i ($l_1^i \geqslant k_1^i$, $l_2^i \geqslant k_2^i$) такие, что при произвольном j, $1 \leqslant j \leqslant m$, как правило, справедливы следующие утверждения:*

1. $j \geqslant i + k_2^i \to \neg(f_i \prec f_j)$;
2. $j > i + l_2^i \to f_i \succ f_j$;
3. $j \leqslant i - k_1^i \to \neg(f_i \succ f_j)$;
4. $j < i - l_1^i \to f_i \prec f_j$.

Гипотеза 2 утверждает, что для каждого АПУ f_i в соответствии с его местом i в абсолютном турнире можно указать окрестности (k_1^i, k_2^i) и $[l_1^i, l_2^i]$ такие, что влево от них f_i не выигрывает или проигрывает, а вправо—не проигрывает или выигрывает, соответственно. В самой же окрестности (k_1^i, k_2^i) поведение f_i может колебаться произвольным образом, в частности, f_i может проигрывать АПУ, занимающему более низкое место.

Укажем на некоторые мотивы в пользу гипотезы. Можно полагать, что для произвольных абсолютных мест i и j, если $i < j$, то $\forall P \in \mathcal{P}\,(a_{ip} > a_{jp})$ и потому, в силу отмеченной выше связи коэффициентов a_{ip} и $B(G_p^i)$, можно считать, что $B(G_p^i) > B(G_p^j)$. Поскольку это неравенство выполняется для произвольной $P \in \mathcal{P}$ и содержательно означает, что f_i в каждой позиции имеет больше шансов для выигрыша или ничьей, чем f_j, то неравенство $a_{ij}(P) > a_{ji}(P)$ более вероятно, чем обратное. При этом, чем дальше расположены места i и j друг от друга, тем больше вероятность выполнения первого из неравенств. Если же j расположено в некоторой малой окрестности

i, то шансы исходов партий i с j каждого типа будут примерно одинаковы. Аналогичные утверждения справедливы и для неравенства $a_{ij} > a_{ji}$.

Гипотеза 2 хорошо согласуется также с нашим представлением о „сильных" и „слабых" шахматистах, отраженном, в частности, посредством рейтингов Эло. А именно, с ростом разницы рейтингов Δk игрока i относительно игрока j, по таблице Эло [24], растет процент ожидаемых от i очков в матче между i и j. При этом, если $\Delta k < 735$, i может как выигрывать, так и проигрывать j; в противном случае, i всегда выигрывает. Полагая Δk пропорциональным разнице мест i и j в абсолютном турнире, можно видеть, что выводы Эло и гипотезы аналогичны.

Гипотеза 2 имеет вероятностный характер. Усилим ее, полагая утверждения с вероятностью больше определенного порога (связанного с границами k и l) достоверными. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Для произвольных АПУ f_i и f_j при условиях гипотезы 2:*

а) *если $f_j \succ f_i$, существует множество АПУ F' такое, что $F' | > k_2^i + k_1^i - 1$ и $\forall f \in F' (f_j \succ f \& f_i \prec f)$ в турнире $\mathcal{T} = \langle И, H^*, A_л^*, \tau^*, A_п, A_г \rangle$ для $F \cup \{f_i, f_j\}$, где H^*, $A_л^*$, τ^* — те же, что и в абсолютном турнире, а $A_п$ — обеспечивает матч f_i и f_j с каждым АПУ из F', то $f_j \succ f_i$;*

б) *если $f_j \asymp f_i$, существует множество F'' такое, что $|F''| > l_2^i + k_1^j - 1$ и $\forall f \in F'' (f_j \succ f \& f_i \prec f \vee f_i \asymp f)$ в вышеуказанном турнире $\mathcal{T}$, то $f_j \succ f_i$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $A_1^i = [1, i - l_1^i]$, $B_1^i = [i - l_1^i, i - k_1^i]$, $G_1^i = (i - k_1^i, i)$, $G_2^i = (i, i + k_2^i)$, $B_2^i = [i + k_2^i, i + l_2^i]$, $A_2^i = [i + l_2^i, m]$, $G^i = G_1^i \cup G_2^i$.

Пусть также $\{\alpha_1\beta_1\}$ ($\{\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2\}$), где $\alpha_1\alpha_2 \in \{i, j\}$, $\beta_1\beta_2 \in \{0, 1, 2\}$ множество всех АПУ F таких, что АПУ с номером α_1 заканчивает матч с элементами F с результатом β_1 (в то же время АПУ с номером α_2 с теми же АПУ имеет результат β_2).

а) Пусть $f_j \succ f_i$. Тогда согласно гипотезе 2 $f_j \in A_1^i \cup B_1^i \cup G^i$. Если $f_j \notin G_2^i$, то $f_j \succ f_i$, по определению A_1^i, B_1^i, G^i. Допустим, что $f_j \in G_2^i$. Пусть также $F_0^i = F^* \setminus B_2^i \cup A_2^i$ и $F_2^j = F^* \setminus B_1^j \cup A_1^j$. Тогда $\{i0\} \subseteq F_0^i$ и $\{j2\} \subseteq F_2^j$, а $\{i0, j0\} \subseteq F_0^i \cap F_2^j$.

Если $f_j \in G_2^i$, то легко видеть, что $|F_0^i \cap F_2^j| \leqslant k_2^i + k_1^i - 1$ и тем более $|\{i0, j2\}| \leqslant k_2^i + k_1^i - 1$. В противном случае, т. е. при $|\{i0, j2\}| > k_2^i + k_1^i - 1$, $f_j \notin G_2^i$.

б) Пусть $f_j \asymp f_i$. Тогда $f_j \in B_1^i \cup G^i \cup B_2^i$.

Если $f_j \notin G_2^i \cup B_2^i$, то $f_j \succ f_i$. Допустим обратное, т. е. $f_j \in G_2^i \cup B_2^i$. Пусть также $F_2^j = F^* \setminus A_1^j \cup B_1^j$ и $F_{01}^i = F^* \setminus A_2^i$. Тогда $\{j2\} \subseteq F_2^j$ и $\{i01\} = \{i0\} \cup \{i1\} \subseteq F_{01}^i$, а $\{i01, j2\} \subseteq F_{01}^i \cap F_2^j$.

При $f_j \notin G_2^i \cup B_2^i$, $|F_{01}^i \cap F_2^j|$ и тем более $|\{i01, j2\}|$ не превышает

$l_2^i+k_1^j-1$. Если же $|\{i01,\ j2\}|>l_2^i+k_1^j-1$, то f_j не может принадлежать $G_2^i\cup B_2^i$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $f_j\prec f_i$ и требуется выяснить выполнение $f_j\succ f_i$, то знание параметров k_1, k_2, l_1, l_2 теряет свое значение, так как возможно $f_j\in A_2^i$.

Замечание 2. Справедливы утверждения, аналогичные теореме 1, в которых условие для F' заменяется неравенством $|\{i2,\ j0\}|>k_1^i+k_2^i+k_2^j-1$, а для F''—$|\{i2,\ j0\}|>k_1^i+l_2^i+k_2^j-1$. Эти условия менее удобны, так как проверяются на множествах АПУ большей мощности, чем указанные в теореме.

Теорема 1 позволяет сформулировать достаточные локально проверяемые условия того, что один АПУ сильнее другого. Поскольку предположение о существовании окрестностей $(k_1^i,\ k_2^i)$ и $[l_1,\ l_2]$ хорошо согласуется с интуитивными представлениями, а также с опытом шахматных турниров, то основная трудность использования теоремы связывается с построением множеств F' или F'' и в оценке параметров k, l. Если есть процедура построения элементов $F'(F'')$, то, даже не зная k и l, по меньшей мере можно утверждать, что чем больше мощность $F'(F'')$, тем достовернее выполнение $f_j\succ f_i$.

Построение $F'(F'')$ не представляется невозможным. Сравнение f_i и f_j связывается с исследованием возможностей некоторого усилителя ω, т. е. предполагается, что $f_j=\omega(f_i)$. Если ω действительно относится к усилителям, то весьма вероятно построить $F'(F'')$ из элементов $\omega^t(f_i)$, где $\omega^t=\underbrace{\omega(\omega(\ldots\omega}_{t}(f_i))\ldots)$, $t=1, 2, \ldots$ При этом чем больше разница номеров абсолютных мест i и j, тем больше, вообще говоря, мощность $\{i0,\ j2\}$ ($\{i01,\ j2\}$) и соответственно легче построение $F'(F'')$.

Трудности проведения матча между заданными АПУ f_i и f_j, связанные со знанием множества всех позиций $\mathcal{P}$, можно отнести к более регулируемым. Действительно, вывод об относительной силе f_i и f_j основан на вычислении сумм $a_{ij}=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum\limits_{P\in\mathcal{P}}a_{ij}(P)$ и $a_{ji}=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum\limits_{P\in\mathcal{P}}a_{ji}(P)$. Если исходить из сделанного выше предположения $\forall ijP(i\prec j\rightarrow a_{iP}>a_{jP})$, вывод о победителе матча между f_i и f_j может быть сделан по произвольной, достаточно представительной выборке из $\mathcal{P}$. При этом более предпочтительно выбирать позиции, априори не дающие преимуществ ни одной из сторон. В наших экспериментах в качестве начальных использовались *сбалансированные* позиции, определяемые следующим образом. Множество позиций H' игры $И$ назовем *тестовым*, если оно удовлетворяет нижеследующим неформальным требованиям:

1) позиции из H' не дают явных преимуществ ни одному из противников; 2) позиции из H' ортогональны, т. е. в достаточной степени отличны друг от друга; 3) множество H' представительно,

т. е. в H' включено достаточно много позиций, удовлетворяющих первым двум требованиям.

Позицию S игры $И$ назовем *сбалансированной* для АПУ f, если процесс игры f против f из начальной позиции S заканчивается одной из ничейных ситуаций в $И$.

Аналогом рассмотренной процедуры может служить процесс последовательного взвешивания физических объектов, когда балансировка начальных ситуаций соответствует уравновешиванию левого и правого коромысла весов, прототипом которого у нас является сама игра, а „взвешиваются" информационные характеристики несовпадающих элементов заданных пар систем управления — „левого и правого игроков".

Подмножество H всех сбалансированных одновременно для заданных АПУ f_i и f_j позиций из H' используется как начальные позиции в матчах. Отметим, что при невозможности выделить из тестовых сбалансированные, в качестве начальных можно использовать сами тестовые позиции.

§ 6. О разрешимости проблемы адаптации шахматных алгоритмов

1. Как было отмечено в § 2.1, на подступах к решению ПАКА1 целесообразно ослабить некоторые из требований. В частности, если снять требование о строго последовательном усилении гипотез при каждом акте их преобразования, то соответствующая шахматная конкретизация проблемы АКА в рамках гипотезы 2 и при некоторых естественных предположениях о классе шахматных алгоритмов становится разрешимой.

В 1950 г. в [134] К. Шеннон сформулировал проблему построения „самоулучшающейся программы", „вырабатывающей собственные принципы игры", которую считал наиболее трудной в шахматном программировании. Ниже тем самым доказывается разрешимость проблемы Шеннона, формализованной в виде требования о построении алгоритма итеративной оптимизации шахматных алгоритмов при „разумных" ограничениях на стоимость каждого шага итерации.

2.1. ПАКА2 определим как проблему, в которой при заданных комбинаторной оптимизационной проблеме L, множестве алгоритмов U, предназначенных для разрешения L, квазифункциональном отношении $\rho \subseteq U \times U$ и пороге $\Delta^*(t)$ на допустимое число элементарных вычислений при построении очередной t-ой гипотезы, требуется построить АПВ, моделирующий ρ.

Произвольную ПАКА2, в которой L есть α-приближенная ПОУ^{ш}, U—заданное множество алгоритмов, предназначенных для разрешения ПОУ^{ш}, U^*—подмножество всех оптимальных в ПОУ^{ш} алгоритмов из U и $\rho \subseteq U \times U^*$, назовем *шахматной* (ПАКА2^{ш}).

Отметим, что в ПАКА2^{ш} предполагается, что $U^* \subseteq U$, однако и

в противном случае смысл нижеследующих утверждений сохранится, если вместо оптимальных в ПОУ^{ш} решений рассматривать наилучшие из U.

2.2. Покажем, что ПАКА2^{ш} при наличии процедуры последовательного порождения наборов (определенной длины) алгоритмов для ПОУ^{ш} становится разрешимой.

Для упрощения дальнейших рассуждений без искажения существа рассматриваемых вопросов вместо величин $k_1^i+k_2^i$, $l_1^i+l_2^i$—указателей выхода из неопределенных зон в теореме 1, нам будет удобно оперировать с величинами $m=2\max(\max\limits_{f_i\in F^*} k_1^i,\ \max\limits_{f_i\in F^*} k_2^i)+1$ и $m'=$ $=2\max(\max\limits_{f_i\in F^*} l_1^i,\ \max\limits_{f_i\in F^*} l_2^i)+1$, где k_j^i, l_j^i, F^*, $j=1, 2$, определены в § 5. Для произвольных абсолютных мест j и i, $j\leqslant i$ через $[j, i]$ будем обозначать число абсолютных мест от j до i включительно. В множествах F_0^i и F_2^i, введенных при доказательстве теоремы 1, выделим подмножества F_{0+}^i и F_{2+}^i абсолютных мест, алгоритмам которых произвольный алгоритм на i-ом месте обязательно проигрывает матчи или их выигрывает соответственно.

Непосредственно из определений m', F_{0+}^i и F_{2+}^i следует

Лемма 1. $\forall jiz(j<i\&|[j, i]|\geqslant m'+z\rightarrow|F_{0+}^i\cap F_{2+}^j|\geqslant z)$.

Предикатом усиления назовем предикат, который для алгоритма i и произвольных z других алгоритмов, предназначенных для разрешения ПОУ^{ш}, проверяет, проигрывает ли i каждой из z и имеется ли среди z алгоритмов такой, который выигрывает не только у i, но также у всех других из z.

Как следует из теоремы 1, выполнение предиката усиления при $z\geqslant m$ является достаточным условием при выборе алгоритма более сильного чем i.

Пусть $\psi_z(t)$—процедура, порождающая z-ки алгоритмов из U $(z>0)$ в ПАКА2^{ш}, такая, что для произвольной z-ки S существует t, $1\leqslant t<\infty$, при которой $\psi_z(t)=S$. Пусть также $\Delta(\psi_z, t)$—число элементарных вычислений, необходимое для порождения процедурой $\psi_z(t)$ произвольных z алгоритмов, разрешающих ПОУ^{ш}, и проверки для них предиката усиления относительно заданного алгоритма i.

Будем говорить, что алгоритм ω *разрешает* ПАКА2^{ш} *с точностью* l, если для произвольного $f\in U$ предельное решение $\omega(f)$ отлично от истинного решения ПОУ^{ш} не более чем на l абсолютных мест.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Произвольная* ПАКА2^{ш}, *для которой существует процедура порождения* $\psi_z(t)$, *при* $z\geqslant m$ *и* $\Delta^*(t)\geqslant\Delta(\psi_z, t)$, *разрешима с точностью* $m'+z$.

Доказательство. Пусть f произвольный элемент U. Посредством ψ_z последовательно порождаем z-ки из U, для каждой из которых проверяем выполнение предиката усиления относительно f.

При первом же ее выполнении на некоторой z-ке заменяем f победителем f' всех элементов этой z-ки и процедуру поиска оптимального алгоритма начинаем с f' заново.

При такой процедуре, если f не принадлежит промежутку $[1, m'+z]$, то за конечное время будет найден какой-либо алгоритм f' из U сильнее f. Действительно, при указанных условиях, согласно лемме 1, найдется хотя бы одна z-ка, удовлетворяющая предикату усиления относительно f; в то же время в соответствии с определением ψ_z, указанная z-ка будет выдана процедурой ψ_z за конечное время.

Поскольку множество всех алгоритмов различной силы для ПОУ^{ш} конечно, то при применении вышеуказанной процедуры к произвольному алгоритму f из U результирующие алгоритмы могут только лишь конечное число тактов не принадлежать промежутку $[1, m'+z]$, что и требовалось доказать.

2.3.1. Итак, вопрос разрешимости ПАКА2^{ш} нами сведен к вопросу о возможности построения порождающей процедуры $\psi_z(t)$ при $z \geqslant m$ с достаточно хорошей оценкой $\Delta(\psi_z, t)$ на число элементарных вычислений при построении t-ой гипотезы. Покажем осуществимость указанной процедуры при некоторых достаточно естественных требованиях к множеству разрешающих алгоритмов ПОУ^{ш}.

2.3.2. Пусть $\Gamma_n^k(t)$—определенный в § 2.3 алгоритм порождения Δ_n^k-наборов длины $1 \leqslant k \leqslant n$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Для произвольных множества $\mathcal{B}$ с порождающим алгоритмом $\psi_1(x)$ (без повторений) и $z>0$, алгоритм $\psi_z(t)$ такой, что $\psi_z(1)=\{\psi_1(1), \ldots, \psi_1(z)\}$ и*

$$\psi_z(t)=\{\psi_1(n),\ \psi_1((\Gamma_{n-1}^{z-1}(t-C_{n-1}^{z-1}))_1), \ldots,\ \psi_1((\Gamma_{n-1}^{z-1}(t-C_{n-1}^{z-1}))_{z-1})\},$$

при $C_{n-1}^z < t \leqslant C_n^z$ и $n>z$, порождает все z-ки из $\mathcal{B}$ (без повторений).

Доказательство. Если $\tilde{\psi}_z(t)$ порождает всевозможные z-ки чисел, то искомый алгоритм $\psi_z(t)$ можно определить в виде $\psi_z(t)=\{\psi_1((\tilde{\psi}_z(t))_1), \ldots, \psi_1((\tilde{\psi}_z(t))_z)\}$. Действительно, если s—произвольная z-ка из $\mathcal{B}$, то, согласно определению $\psi_1(x)$, найдутся $x_1, \ldots, x_z$ такие, что $s=\{\psi_1(x_1), \ldots, \psi_1(x_z)\}$, и в то же время найдется t, при котором $\psi_z(t)=\{x_1, \ldots, x_z\}$. При этом, если $\psi_1(x)$ и $\tilde{\psi}_z(t)$ будут без повторений своих значений, то $\psi_z(t)$ также будет без повторений.

Для завершения доказательства построим $\tilde{\psi}_z(t)$. Пусть $\tilde{\psi}_z(1)=\{1, \ldots, z\}$ и $\tilde{\psi}_z(t)$, при $1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^z$, $n>z$, уже определена. Тогда при $C_{n-1}^z < t \leqslant C_n^z$ положим $\tilde{\psi}_z(t)=\{n\} \cup \Gamma_{n-1}^{z-1}(t-C_{n-1}^z)$.

Алгоритм $\tilde{\psi}_z(t)$ на отрезке $1 \leqslant t \leqslant C_n^z$ при произвольном $n \geqslant z$ перечисляет без повторений все сочетания z-ок, выделяемых из множества $\{1, \ldots, n\}$. Утверждение очевидно при $n=z$. Пусть оно верно при $1 \leqslant t \leqslant C_{n-1}^z$ и $n>z$. Поскольку $C_n^z=C_{n-1}^z+C_{n-1}^{z-1}$, то для по-

строения всех z-ок из $\{1, \ldots, n\}$ достаточно к уже построенным z-кам из $\{1, \ldots, n-1\}$ добавить z-ки, полученные объединением n со всевозможными Δ_{n-1}^{z-1}-наборами. Порождение же всех таких наборов без повторений обеспечивается алгоритмом Γ_{n-1}^{z-1} (см. § 2.3).

2.3.3. Опишем порождающую процедуру для класса предназначенных для разрешения ПОУ^{ш} алгоритмов, выделяемых при предположениях достаточно общего типа.

Как следствие гипотезы 1 в § 3.5 был определен класс алгоритмов $\mathcal{B}_1$, которому предположительно принадлежит оптимальный для ПОУ^{ш} алгоритм. Каждый элемент $\mathcal{B}_1$ задается конкретизацией алгоритмов синтеза стратегий и поиска в тезаурусе, координатора и тезауруса. В свою очередь в каждом из указанных механизмов порождения элементов $\mathcal{B}_1$ может иметься свое, будем полагать, конечное число других механизмов порождения или *регуляторов*. Класс $\mathcal{B}_1$ порождается всевозможными изменениями состояний регуляторов, в частности посредством следующих операторов:

1. Накопления закономерностей, в частности, посредством включения в тезаурус закономерностей из списков, которые либо заданы априори, либо должны быть извлечены из заданных текстов или полностью синтезированы;

2. Оптимизации заданных закономерностей, в частности, их детерминизации, компактизации записей, увеличения общности применения, уточнения степени правдоподобия, организации взаимного расположения в тезаурусе и др.;

3. Оптимизации алгоритмов построения стратегических планов, вычисления правдоподобия целей, поиска в тезаурусе, синтеза стратегий, координатора и др. (см. главу 5).

Тем самым можно считать, что алгоритмы классов типа $\mathcal{B}_1$ определяются конкретизацией индивидуально распознаваемых состояний каждого из заданных l регуляторов, вообще говоря, с бесконечными областями их изменения. Требование же индивидуальной распознаваемости уточняется посредством предположения о том, что все состояния каждого регулятора пронумерованы и заданы кодирующие-декодирующие операторы перехода от произвольного состояния регулятора к его номеру и наоборот.

Произвольное множество алгоритмов вышеуказанного типа при $l>0$ назовем *l-порожденным*.

Ясно, что особо интересны l-порожденные множества, содержащие оптимальный для ПОУ^{ш} алгоритм, а вопрос построения соответствующей полной системы регуляторов естественно ставить в рамках гипотезы I.

Будем говорить, что l-порожденное множество с *независимой регуляцией*, если произвольный алгоритм этого множества, полученный в результате применения заданной выборки регуляторов, не зависит от порядка их применения; в противном случае будем говорить *о зависимой регуляции*.

При наличии подходящих кодирующих-декодирующих операторов вопрос генерации алг ритмов l-порожденного множества $\mathcal{B}^l$ можно свести к вопросу генерации l-ичных чисел. Действительно, если $\mathcal{B}^l$—множество с зависимой регуляцией и алгоритм $f \in \mathcal{B}^l$ получен установкой регулятора i_1 в состояние $j_1, \ldots,$ регулятора i_r в состояние j_r, то код $\xi_1(f)$ определим как l-ичное число $\underbrace{i_1 \ldots i_1}_{j_1} \ldots \underbrace{i_r \ldots i_r}_{j_r}$, где $1 \leqslant r \leqslant l$. В свою очередь произвольное l-ичное число A интерпретируем как код определенного алгоритма $\xi_1^{-1}(A)$ из $\mathcal{B}^l$, полученного установкой регулятора $(A)_1$ в 1-е состояние, регулятора $(A)_2$ в 1-е состояние, если $(A)_2 \neq (A)_1$, и во 2-ое состояние в противном случае и т. д., регулятора $(A)_l$ в $(j+1)$-е состояние, где $1 \leqslant i \leqslant l$, а j-кратность появления элемента i в A.

Ясно, что для произвольных $f \in \mathcal{B}^l$ и l-го числа A, $\xi_1^{-1}\xi_1(f) = f$ и $\xi_1\xi_1^{-1}(A) = A$.

Если же $\mathcal{B}^l$—с независимой регуляцией и $f \in \mathcal{B}^l$, то код $\xi_2(f)$ определим как l-ое число, полученное из $\xi_1(f)$ упорядочением чисел $(\xi_1(f))_1, \ldots, (\xi_1(f))_{|\xi_1(f)|}$ в порядке их возрастания, а $\xi_2^{-1}(A) = \xi_1^{-1}(A)$. Поскольку последовательность применения регуляторов не влияет на структуру порожденных алгоритмов, то $\xi_2^{-1}\xi_2(f) = f$ (с точностью до эквивалентности алгоритмов).

Пусть теперь $\psi_1^{l1}(x)$—алгоритм, который по произвольному натуральному числу x в десятичной записи выдает l-ое представление x, а $\psi_1^{l2}(x)$, при $x = 1, 2, \ldots,$ выдает в порядке возрастания (без пропусков) те l-ые числа, в каждом из которых элементы младших разрядов не превышают элементов старших. Очевидна следующая

Теорема 4. *Алгоритм* $\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}(x)(\xi_1^{-1}\psi_1^{l2}(x))$, *при* $x = 1, 2, \ldots,$ *перечисляет без повторений элементы l-порожденного множества $\mathcal{B}^l$ с зависимой (независимой) регуляцией.*

Заметим, что при допущении повторений процедуру ψ_1^{l1} можно использовать и при независимой регуляции. Отметим также, что процедуры $\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}$ и $\xi_1^{-1}\psi_1^{l2}$ можно использовать при перечислении всевозможных выводов в исчислениях, поскольку каждое l-порожденное множество можно интерпретировать как множество выводов заданного исчисления с l правилами вывода, в котором независимой регуляции соответствуют выводы, эквивалентные при разных последовательностях применения заданной выборки правил.

2.3.4. В нижеследующей теореме 5 дается положительный ответ на вопрос о разрешимости ПАКА2ш с l-порожденным множеством алгоритмов для ПОУш.

Пусть $c = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} c_i$, где c_i, при $i = 1, \ldots, 5$,—число элементарных вычислений для сравнения, сложения, умножения, деления и вычитания двух чисел соответственно, а $c_м$ и $c_д$—числа элементарных вычислений для проведения одного матча и перехода от l-ичного кода алгоритма к самому алгоритму посредством декодирующего оператора ξ_1^{-1} соответственно. Справедлива следующая

Теорема 5. *Произвольная* ПАКА2ш *с l-порожденным множеством алгоритмов для* ПОУш *и* $\Delta^*(t) \geqslant 2c_м m^2 + 5cm(1+\log_l(t+m+2)) + c_д m$ *разрешима с точностью* $m+m'$.

Доказательство. Из теорем 2—4 следует, что для разрешимости ПАКА2ш достаточно доказать неравенство $\Delta(\psi_z, t) \leqslant 2c_м z^2 + 5cz(1+\log_l(t+z+2)) + c_д z$, при $z=m$.

Поскольку нас интересует принципиальная разрешимость ПАКА2ш без учета временной сложности, будем исходить из порождающей процедуры $\psi_z(t)$ с повторениями, существование которой следует из теорем 3 и 4 при использовании $\psi_1^{l1}(x)$. Полагая, что $\psi_z(t)$, при $t=1, 2, \ldots$, последовательно генерирует z-ки алгоритмов заданного l-порожденного множества, оценим сверху $\Delta(\psi_z, t)$.

Пусть на t-ом шаге текущей гипотезой для ПОУш является h_t, а $\psi_z(t) = \{\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}(n)\} \cup \{\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}((\Gamma_{n-1}^{z-1}(t-C_{n-1}^z))_1), \ldots, \xi_1^{-1}\psi_1^{l1}((\Gamma_{n-1}^{z-1}(t-C_{n-1}^z))_{z-1})\}$.

Тогда для построения гипотезы h_{t+1} производятся следующие операции:

1. Сравнение $\Gamma_{n-1}^{z-1}(t)$ с набором $\{1+n-1-z, \ldots, n-1\}$ и порождение, вообще говоря, $\Gamma_n^{z-1}(t+1)$;

2. Построение, в общем случае, $\psi_1^{l1}(n+1)$, $\{\psi_1^{l1}((\Gamma_n^{z-1}(t+1-C_n^z))_1), \ldots, \psi_1^{l1}((\Gamma_n^{z-1}(t+1-C_n^z))_{z-1})\}$;

3. Декодирование $\psi_1^{l1}(x)$ в алгоритм $\xi_1^{-1}\psi_1^{l1}(x)$ для значений x, определяемых компонентами $\Gamma_n^{z-1}(t+1-C_n^z)$ и n;

4. Проверка предиката усиления для h_t и $(t+1)$-ой z-ки алгоритмов;

5. Замена h_t на h_{t+1}.

Оценим каждую из указанных операций.

Исходя из алгоритма Γ_n^{z-1} § 2.3 легко получить, что для операции 1 требуется не более $(2c_1+c_2)z \leqslant 3cz$ элементарных вычислений.

При $l>1$ в качестве $\psi_1^{l1}(x)$ используем стандартную процедуру представления x через сумму $a_y l^y + a_{y-1} l^{y-1} + \ldots + a_1 l + a_0$, а при $l=1$ полагаем $\psi_1^{l1}(x) = x$. Процедура ψ_1^{l1} при $l>1$ по числу x дает l-ую запись x. Для этого она вначале выявляет наибольшее y такое, что $l^y \leqslant x < l^{y+1}$ (для этого требуется порядка $\log_l x$ умножений и сравнений), затем последовательно определяет коэффициенты a_y, $a_{y-1}, \ldots, a_0$. В целом, для вычисления $\psi_1^{l1}(x)$ требуется не более $(1+c_2+c_3+c_4+c_5)\, z \log_l x \leqslant 5cz \log_l n$ элементарных вычислений.

Поскольку при каждом t, $C_{n-1}^z \leqslant t \leqslant C_n^z$ требуется построение l-ичных представлений чисел, не превосходящих n, и из $t>z+1$ следует $t>n$, то всегда $t+z+2>n$. Поэтому вычисление $\psi_1^{l1}(n)$ потребует менее чем $5cz\log_l(t+z+2)$ элементарных вычислений.

Декодирование z кодов алгоритмов посредством ξ_1^{-1} не превышает $c_д z$ вычислений. И наконец, для проверки предиката усиления можно сначала проверить, выигрывает ли h_t у каждого алгоритма z-ки, после чего провести матч каждого алгоритма z-ки со всеми другими алгоритмами той же z-ки, до выявления в ней алгоритма, выигрывающего у всех остальных. Для этой операции потребуется не более $c_м(z+z^2)+2cz$ элементарных вычислений.

Суммируя полученные оценки приходим к требуемому неравенству. Теорема доказана.

2.3.5. Отметим, что в приведенной выше оценке $\Delta(\psi_z, t)$ не рассмотрена сложность достижения того или иного состояния регуляторов. Такое пополнение в нашем представлении возможно лишь после дальнейших исследований сложности синтеза знаний.

Доказательство теоремы 5 одновременно дает нам определенный метод адаптации шахматных алгоритмов—*метод локальных турниров* 1 (МЛТ-1), который, при известных состояниях регуляторов заданного множества l-порожденных алгоритмов, доставляет с определенной точностью наилучший алгоритм этого множества посредством перечисления всех z-ок из него и проверки для них предиката усиления.

Интересно сравнить возможности МЛТ-1 и одного из методов поиска логического вывода, например, метода резолюций (сравнение уместно ввиду отмеченной выше аналогии l-порожденных алгоритмов с выводами в исчислениях). В частности, если формула выводима, то вывод ее методом резолюций будет найден, а окончание вывода будет распознано. МЛТ-1 гарантирует достижение наилучшего решения в множестве заданных решений, но момент этот распознается лишь предельно. В то же время для обеих методов отсутствуют исчерпывающие сложностные оценки, а сами оценки для метода резолюций могут быть только относительными.

Отметим, что при адаптации шахматных алгоритмов каждая текущая гипотеза уже является решением (быть может, и не оптимальным), а стимулом к ее преобразованию служит выполнимость локально вычислимого предиката усиления. Аналогичным стимулом при индуктивном синтезе программ по примерам их работы является рассогласованность гипотезы с очередным анализируемым примером. При этом гипотезы, которые могут и не принадлежать классу решений проблемы, последовательно обобщаются до построения в пределе искомого решения.

Интересна также аналогия между адаптацией шахматных алгоритмов методом локальных турниров и развитием стадных животных посредством турнирного выбора новых вожаков с предоставлением им преимущественного права при воспроизводстве особей своего вида. Возникает вопрос, нельзя ли в рамках этой аналогии интерпретировать утверждение теоремы 5 как определенную гарантию тому, что указанный способ преобразования стада обеспечивает его поступательное развитие.

3. Разрешимые ПАКА2 можно дополнить требованием выбора алгоритмов, оптимальных относительно заданного оператора качества. Так их можно исследовать относительно $\pi(\sigma)$-сложности. В этом случае, при конечном U, ПАКА2 будут принадлежать классу комбинаторных проблем L_1.

Если же в ПАКА2 допускается отсутствие точных разрешающих алгоритмов, то можно дополнительно ввести оператор оценки степени

приближения алгоритмов к оптимальным решениям. Так, если в проблеме L ПАКА2 используется оператор качества λ, то оптимальным приближенным решением ПАКА2 может быть решение, минимизирующее при фиксированной временной сложности сумму $\sum_{u \in U} |\lambda(\omega(u)) - \lambda(f^*)|$, где f^*—некоторое оптимальное решение L, ω—исследуемый разрешающий алгоритм для ПАКА2.

При использовании временной сложности выбор оптимального алгоритма будет существенно зависеть от соотношения между заданными точностью решений, значением $\Delta^*(t)$, кратностью просмотра порождающих алгоритмов и др. В нижеследующей теореме 6 утверждается возможность и выделяются условия однократного порождения z-ок алгоритмов процедурой ψ_z при поиске оптимального алгоритма.

Для произвольных алгоритмов f_i и f_j в ПОУ^{ш}, $j<i$, множество алгоритмов S при $|S| \geqslant m-1$ назовем *достаточным для перехода из i в j*, если для $\{f_i, f_j\} \cup S$ предикат усиления истинен и f_j—сильнейший, а f_i—слабейший алгоритмы.

Пусть $E_i^j(x)$—класс всех множеств алгоритмов мощности x, достаточных для перехода из i в j. Справедлива следующая

Лемма 2. $\forall j i_1 i x (j<i_1<i \& |[i_1, i]| \geqslant m' \to E_{i_1}^j(x) \subseteq E_i^j(x))$,
где j, i_1 i—абсолютные места.

Доказательство. Пусть S—произвольный элемент $E_{i_1}^j(x)$. Тогда для принадлежности S к $E_i^j(x)$ достаточно, чтобы каждый алгоритм из S выигрывал бы не только у i_1, но и у i. А это условие имеет место, поскольку $|[i_1, i]| \geqslant m'$ и потому $S \subseteq F_0^{i_1} \cap F_{0+}^i$. Заметим, что лемма справедлива уже при $|[i_1, i]| \geqslant \frac{m-1}{2} + \frac{m'-1}{2}$.

Теорема 6. *Произвольная* ПАКА2^{ш}, *для которой существует процедура порождения $\psi_{2m'}(t)$, при $\Delta^*(t) \geqslant \Delta(\psi_{2m'}, t)$ и однократном последовательном порождении $2m'$-ок посредством $\psi_{2m'}(t)$, разрешима с точностью $3m'$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 2, ПАКА2^{ш} при $\psi_{2m'}$ разрешима с точностью $3m'$, если после каждого изменения гипотезы разрешается порождение всех $2m'$-ок заново. Покажем, что последнее допущение в условиях теоремы 3 излишне. Действительно, если i и S—очередные гипотеза (точнее было бы сказать „абсолютное место гипотезы") и $2m'$-ка, соответственно, для которых предикат усиления истинен, а i_1—гипотеза, заменившая i вследствии истинности этого предиката, то $|F_0^i \cap F_2^{i_1}| \geqslant 2m'$, где F_0^i и $F_2^{i_1}$—определены в теореме 1. Т. к. $F_0^i \cap F_2^{i_1} = B_1^{i_1} \cup G_1^{i_1} \cup [j,i] \cup G_2^i \cup B_2^i$, а $|B_1^{i_1} \cup G_1^{i_1} \cup G_2^i \cup B_2^i| \leqslant m'$, то $|[j, i]| \geqslant m'$. Следовательно, в соответствии с леммой 2, $E_{i_1}^j(x) \subseteq E_i^j(x)$ для произвольных x и $j>i_1$. Последнее означает, что элемент из $E_{i_1}^j(x)$, способный перевести гипотезу из состояния i_1, в состояние j, способен произвести тот же переход из состояния i. Поэтому, если такой элемент был бы порожден посредстом $\psi_{2m'}$ в состоянии i, то

гипотеза уже была бы переведена в состояние j. Или, другими словами, если состояние i_1 достигнуто на некотором t-ом шаге $\psi_{2m'}$, то все состояния, доступные из i_1 при продолжении работы $\psi_{2m'}$ с $t+1$ шага совпадут с состояниями, доступными из i при запуске $\psi_{2m'}$ заново, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Произвольная* ПАКА2ш *с l-порожденным множеством алгоритмов для* ПОУш *и* $\Delta^*(t) \geqslant 8c_м(m')^2 + 10cm'(1+\log_l(t+2m'+2)+2c_д m'$ *разрешима с точностью* $3m'$ *при однократном последовательном порождении* $2m'$*-ок алгоритмов.*

Доказательство теоремы 7 легко получить из доказательства теоремы 5 заменами в нем m на $2m'$ и ссылки на теорему 2 теоремой 6. Как следствие из него получаем метод адаптации шахматных алгоритмов—МЛТ-2.

4. При построении конкретных процедур адаптации разрешающих алгоритмов ПОУш могут оказаться полезными нижеследующие свойства.

Пусть для произвольного абсолютного места i, $k_1^i = k_2^i = \frac{m-1}{2}$.

Свойство 1. $\forall tijx(|F_0^i \cap F_2^j| = x \leftrightarrow \left(0 < x < i + \frac{m-1}{2} \rightarrow j = i + m - 1 - x\right) \& \left(x = i + \frac{m-1}{2} \rightarrow j = i + \frac{m-1}{2} - x\right)\right)$.

Данное свойство становится очевидным, если учесть, что $F_0^i = \left[1, i + \frac{m-1}{2}\right]$, $F_2^j = \left[j - \frac{m-1}{2}, |F^*|\right]$.

Свойство 1 индуцирует следующее

Свойство 2. $\forall ijk(|F_0^i \cap F_2^k| > |F_0^i \cap F_2^j| > 0 \leftrightarrow k < j)$.

Оно служит обоснованию высказанного к теореме 1 замечания о том, что при выполнении предиката усиления для некоторой z-ки относительно заданного i, шансы выделения алгоритма более сильного, чем i, растут с увеличением z.

Произвольный алгоритм f_j сильнее каждого алгоритма из $F_2^j \setminus D_1^j$, где $D_1^j = \left[j - \frac{m-1}{2}, j\right]$. Поэтому справедливо

Свойство 3. *Если в процессе адаптации разрешающего алгоритма* ПОУш *был построен некоторый алгоритм f_j и из области дальнейшего поиска было исключено произвольное подмножество из $F_2^j \setminus \{j\}$, то независимо от числа таких операций предельное решение* ПОУш *может отстоять от оптимального алгоритма исходной зоны поиска не более чем на $|D_1^j| \leqslant \frac{m-1}{2}$ абсолютных мест.*

Данное свойство позволяет после проверки предиката усиления на некоторой z-ке исключить из области дальнейшего поиска все алгоритмы этой z-ки, за исключением сильнейшего.

§ 7. О достижениях по адаптации комбинаторных алгоритмов

1. Теорию АКА можно отнести к разделу общей теории алгоритмов, исследующей вопросы повышения эффективности алгоритмов, в частности, возможности их алгоритмического ускорения. Однако на данной стадии развития общей теории многие сформулированные в § 4 проблемы АКА либо вообще не рассмотрены, либо имеют лишь косвенное отношение к исследованным в этой теории вопросам. Сравнительно в большей степени возможности адаптации изучены для отдельных комбинаторных проблем, в частности, для поиска логического вывода и игр. Интенсивные исследования возможностей адаптации ведутся при синтезе алгоритмов [10, 117, 155], в ситуационном управлении [99, 100]. Ряд методов искусственного интеллекта [158], в частности, методы построения моделей проблемной среды, следует отнести к попыткам разработки эффективных усилителей в комбинаторных проблемах по аналогии с используемыми человеком.

Методы адаптации параметрических алгоритмов относятся к одним из наиболее развитых ветвей общей теории адаптации. Достижения в этом направлении в достаточной мере известны и с ними можно ознакомиться по работам [127, 129].

Ниже будут описаны некоторые типовые теоремы общей теории ускорения алгоритмов, а также достижения по усилению алгоритмов поиска логического вывода и игровых. Такой выбор объясняется тем, что результаты по этим направлениям получены сравнительно недавно, и потому в настоящее время недостаточно представлены в обзорных работах.

2. Непосредственное применение многих теорем общей теории ускорения к алгоритмам в конечных комбинаторных проблемах не представляется возможным, поскольку они доказаны для «почти всех аргументов» и для конечного их множества могут не выполняться. Например, известная теорема Блюма [147] формулируется следующим образом.

Пусть $\lambda i \varphi_i$—стандартная нумерация всех частично рекурсивных функций, а сигнализирующая Φ—последовательность функций, $\lambda i \Phi_i$, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомы Блюма):

1) для любого числа i области определения Φ_i и φ_i совпадают;

2) отношение $\Phi_i(x) \leqslant y$ разрешимо.

Здесь $\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ указывает на то, что f зависит от аргументов $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ являются параметрами. Функция Φ_i имеет смысл сложности вычислений, в частности, временной сложности.

Блюм доказал следующую теорему об ускорении: для сколь угодно быстро растущей общерекурсивной функции $\lambda xyr(x, y)$ можно указать такую общерекурсивную функцию f (принимающую значение только 0 и 1), что если $\varphi_i = f$, то найдется такое число j, что $\varphi_j = f$ и $\Phi_i(x) > r(x, \Phi_j(x))$ для всех x, кроме конечного множества.

Аналог этой теоремы справедлив не только для обычных, но также и для предельных вычислений [122].

Для почти всех аргументов Блюмом показано также [148], что если функция r (показатель убыстрения) достаточно велика, то алгоритм, определяющий по данному методу более быстрый метод вычисления f, построить нельзя.

В другой интересной теореме Дж. Хелма и П. Янга [153] доказывается существование функции, обладающей таким свойством: если имеется программа вычисления этой функции и необходимо перейти к программе, вычисляющей функцию гораздо эффективнее, то это можно сделать, значительно увеличив программу; функция, описывающая необходимый рост сложности более эффективной программы, растет быстрее любой рекурсивной функции.

Эта теорема доказана для почти всех аргументов, хотя смысл ее, видимо, сохранится и в конечных проблемах. К достоинствам теоремы Дж. Хелма и П. Янга следует отнести тот факт, что в ней убыстрение рассматривается в комплексе с другими процессами, связанными с вычислением функций, а именно, с изменением объема программ. Интуитивно очевидно, что пренебрегая этим объемом и временем поиска нужной команды в программе можно в константу раз убыстрить вычисления. Многие теоремы об убыстрении доказаны при указанных допущениях. В частности, справедлива теорема [122]: пусть машина $\mathfrak{M}$ предельно вычисляет предикат $f(x)$, причем сигнализирующая времени у этой машины равна $t_{\mathfrak{m}}(x)$, а сигнализирующая емкости—$S_{\mathfrak{m}}(x)$. Для произвольной константы $c>0$ существует другая машина $\mathfrak{M}'$ вычисляющая этот же предикат с сигнализирующими емкости и времени:

$$S_{\mathfrak{m}'}(x) \leqslant \max\left\{|x|+1,\ \frac{S_{\mathfrak{m}}(x)}{c}\right\},$$

$$t_{\mathfrak{m}'}(x) \leqslant |x|^2 + \frac{t_{\mathfrak{m}}(x)}{c},$$

где $|x|$ — длина записи значения аргумента x.

Огрубление критериев сложности вычислений вышеуказанного типа позволяет выявить те или иные механизмы, влияющие на величину сложности, и это может быть полезно в аналитических исследованиях. В то же время ясно, что при получении оценок действительной сложности вычислений пренебрежение ростом объема программ и связанным с ним ростом времени поиска нужных команд может существенно исказить истинные значения этих оценок.

3.1. О тесной связи теорем об убыстрении вычислений общерекурсивных функций и теорем о сокращении длины доказательства в формальных системах справедливо отмечено в [42]. Однако и в этих теоремах возможность сокращения длины выводов рассматривается изолированно от изменений в объеме программ поиска этих выводов. Например, в [42] приводится следующий результат Эренфойта и Мыцельского.

Пусть T—теория, а $T+\alpha$—ее расширение, получаемое добавлением к списку аксиом произвольной формулы α. Пусть также имеются критерии сложности доказательства в теории T и ее расширениях, удовлетворяющие аксиомам типа аксиом Блюма и некоторым естественным условиям. Тогда если теория $T+\neg\alpha$ неразрешима, то для любой общерекурсивной функции f найдется такая теорема τ теории T, что $f(w^*(\tau))\leqslant w(\tau)$, где w и w^*—критерии сложности типа длины доказательства в теориях T и $T+\alpha$ соответственно.

К указанному классу теорем об уменьшении длин выводов посредством использования допустимых правил в исчислениях общего типа относится также нижеследующая теорема С. Ю. Маслова [62].

Пусть $\mathcal{P}$—каноническое исчисление Поста и $\mathcal{P}^+$ получается из $\mathcal{P}$ добавлением некоторых допустимых правил и некоторого количества выводимых в $\mathcal{P}$ слов в качестве аксиом; число букв в алфавите этих исчислений обозначим через k. Посредством $V_{\mathcal{P}}$ обозначим множество выводимых в $\mathcal{P}$ слов; пусть $V'\subseteq V_{\mathcal{P}}$ и φ—общерекурсивная функция. Будем говорить, что $\mathcal{P}^+$ φ-ускоряет $\mathcal{P}$ на V', если каждое слово из V', минимальная длина вывода которого в $\mathcal{P}^+$ равна n, нельзя вывести в $\mathcal{P}$ при помощи вывода меньшей, чем $\varphi(n)$ длины. Посредством $p_i(V')$ обозначим отношение количества слов из $V_{\mathcal{P}}$ длины, не большей чем i, к количеству слов из $V_{\mathcal{P}^+}$ (такой же длины). В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема. а. *Для любого $\mathcal{P}$ и любой константы c можно построить $\mathcal{P}^+$, которое cn-ускоряет $\mathcal{P}$ на $V_{\mathcal{P}}$.*

б. *Можно построить $\mathcal{P}$, ускоряемое лишь линейной функцией (для всякого $\mathcal{P}^+$ найдется такое c, что множество cn-ускоряемых слов конечно).*

в. *Для любой φ можно построить такие $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^+$ и V', что $p_i(V')\underset{i\to\infty}{\to}1$ и $\mathcal{P}^+$ φ-ускоряет $\mathcal{P}$ на V'.*

г. *Если $\mathcal{P}^+$ φ-ускоряет $\mathcal{P}$ на $V_{\mathcal{P}}$, то для некоторого S $\varphi(n)\leqslant k^{S^n}$ ($\varphi(n)\leqslant S^n$ для $k=1$); при любом S найдутся такие $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^+$, что $\mathcal{P}^+$ k^{S^n}-ускоряет $\mathcal{P}$ на $V_{\mathcal{P}}$ (S^n-ускоряет для $k=1$).*

3.2. С. Ю. Маслов в [64] отчетливо отделяет действия, направленные на организацию поиска вывода в фиксированном исчислении, и действия, направленные на изучение исчисления на предмет его видоизменения.

Оптимизация исчисления связывается с удовлетворением двух требований: повышения «мощности» исчисления (числа выводимых слов за единицу времени, определяемого сокращением длин выводов) и уменьшения неопределенности при поиске вывода.

В рассматриваемой нами проблеме усиления указанным требованиям соответствуют увеличение «мощности» тезауруса посредством накопления в нем знаний и ускорение поиска этих знаний посредством изменения их представления и организации в тезаурусе, специализации поиска в графе игры и др.

Оба указанных подхода к анализу усиления в принципе представляются совместимыми. Более точное сравнение критериев усиления, понимаемых как «информация, заключенная в исчислении» по [63] и средней временной сложности требует отдельного рассмотрения.

Одна из возможностей уменьшения неопределенности при сохранении длины вывода в [64] связывается с изменением направления поиска вывода. Действенным средством для этой цели служит устранение *c*-правил, допускающих бесконечное число посылок при заданном заключении. «Если допустить некоторое хорошо интерпретируемое изменение вида выводимых в исчислении объектов, то устранение *c*-правил оказывается всегда возможным (и даже без увеличения длин выводов). Этот способ устранения связан с так называемым методом метапеременных (Н. А. Шанин, С. Кангер [41]). Метод состоит в последовательном построении вместо вывода некоторой его «заготовки», содержащей метапеременные, и регулярной проверке возможности превратить заготовку в вывод за счет подбора значений метапеременных». Так при проверке шахматной комбинации метапеременной можно считать множество позиций, получающихся после не мешающих ходов противника [64].

Метод метапеременных одновременно уменьшает неопределенность и повышает мощность исчисления. «Именно выработка допустимых правил в языке с метапеременными (такие правила почти всегда автоматически окажутся не допускающими «вставки» конкретного вида, т. е. не производными) и есть наилучший вариант перехода к новому исчислению $\mathcal{P}^+$» [64].

Указанные обстоятельства позволяют считать основным направлением совершенствования исчислений построение обобщенно эквивалентных исчислений и исчислений инвариантов, определяемых в [64] следующим образом.

Пусть объект П нового языка служит кодом множества $M_{\text{п}}$ исходных объектов в исчислении $\mathcal{P}$. Исчисление $\tilde{\mathcal{P}}$ называется исчислением инвариантов для $\mathcal{P}$, если

$$\forall P\,(P \in \mathcal{P} \rightarrow \exists \Pi\,(P \in M_{\text{п}} \& \Pi \in \tilde{\mathcal{P}}).$$

Если кроме того

$$\forall \Pi\,(\Pi \in \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \forall P\,(P \in M_{\text{п}} \rightarrow P \in \tilde{\mathcal{P}})),$$

то $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$ называются обобщенно эквивалентными.

Представляется, что в нашей постановке проблемы адаптации построение исчисления инвариантов может интерпретироваться, в частности, как переход от заданных *P*-стратегий к закономерностям, в которых как распознаватели, так и соответствующие действия обобщены до образов позиций и *P*-стратегий. Эти образы и являются инвариантами.

Обратный метод установления выводимости С. Ю. Маслова мо-

жет рассматриваться как метод синтеза допустимых правил фиксированного типа. Эта возможность в [61] описана следующим образом.

«1. Анализируя исходный объект S, выделяем некоторое количество «более выводимых» объектов $S_1, \ldots, S_r$, к которым мы имеем шанс «подняться» в соответствии с правилами исчисления.

2. На основе правил вывода пытаемся спуститься от $S_1, \ldots, S_r$ к S; при этом спуске могут возникать новые объекты $S_{r+1}, \ldots, S_{r+r'}$, требующие установления своей выводимости.

3. По завершении спуска мы получаем допустимое правило, позволяющее перейти от S_k к установлению выводимости объектов $S_1, \ldots, S_{r+r'}$. Для более широкой применимости получаемых допустимых правил все упомянутые действия должны проводиться в максимально возможной (при данном выборе языка и способа формирования метапеременных) общности».

Там же отмечается, что для примера шахмат в качестве объекта S может рассматриваться матовая позиция, а допустимое правило может иметь вид «позиция с моим королем и ладьей против короля противника при моем ходе выиграна».

Другим средством уменьшения неопределенности исчисления с сохранением длин выводов является варьирование алгоритмом установления вероятностной меры на множестве всех выводов [63], [64]. Один из способов «неравномерного» назначения вероятностей и наиболее надежный из них это доказательство теорем о невозможности каких-то типов выводов, т. е. специализации выводов. «По существу, специализации означают переход к новому исчислению со своими информационными характеристиками (формально в нашей схеме это выразится в назначении вероятности «0» на некоторых продолжениях)» [64].

В нашей постановке этому механизму усиления соответствует механизм введения распределения вероятностей на множестве возможных решений T' и его настройка, т. е. адаптация самой модели.

3.3. В [64] обсуждается также роль аналоговых (правополушарных) и дискретных (левополушарных) способностей мозга при оптимизации исчислений и дается правдоподобное объяснение этого процесса на основе известных физиологических и психологических фактов.

Простые формы взаимодействия этих способностей связываются с организацией переборов в рамках фиксированного исчисления. При этом «вероятностные поля» формируются в аналоговой форме и полностью не могут быть осознаны принципиально.

При формировании допустимых правил существенным является механизм предварительного нацеливания на желательный выводимый объект с последующим восстановлением самого вывода. Предполагается, что механизм нацеливания относится к правополушарному (аналоговому) мышлению, связан с бессознательным и с большим трудом допускает машинное моделирование. При этом «желательный

объект» может возникнуть на основе волевого выбора цели и/или некоторого перебора (но не в исчислении $\mathcal{P}$) [64]. Другой нетривиальный механизм синтеза допустимых правил—«и так далее», это обнаружение того, что «данный объект может служить метапеременной с такой-то областью задания» [64]. Он «еще более фундаментально противостоит последовательному перебору вариантов. Суммарно возникает впечатление, что левое полушарие связано с локальной обработкой материала, а правое—с глобальной» [64]. Здесь уместно отметить, что рассматриваемая нами в § 5.5 процедура выбора максимально правдоподобных целей согласуется с представлениями в [64] и может служить некоторой моделью процессов, связанных с взаимодействием аналогового и дискретного мышления при формировании гипотез о допустимых правилах. Представляется, что схемы правдоподобия целей и их компоненты—элементарные дескрипторы и логические связки, отражают элементы дискретного мышления, фиксируемые сознанием, а веса связей в совокупности отражают «вероятностные поля» аналогового мышления.

Схема правдоподобия с весами по существу дает представление ситуации в виде «дискретной сетки, лежащей на переменных вероятностных полях» [64].

В результате вычисления максимально правдоподобной в позиции P цели F формируется гипотеза—допустимое правило о существовании P-стратегии, обеспечивающей F. Получение этого правила без построения P-стратегии может пониматься как «прыжок» [64].

3.4. Вышеуказанные механизмы совершенствования исчислений и алгоритмов поиска выводов в них обладают большой степенью общности. Они применимы к широкому кругу проблем и определяют, согласно [61], следующие этапы процесса их решения.

1. Построение исходного исчисления $\mathcal{P}$ (первоначальная формализация). 2. Изучение $\mathcal{P}$: а) попытки построения выводов и установления невыводимости, б) нащупывание допустимых правил, в) изучение общих свойств $\mathcal{P}$, нащупывание меры выводимости, попытки удобных переформулировок $\mathcal{P}$. 3. Выбор языка и областей значения метапеременных, формулирование в этом языке допустимых в $\mathcal{P}$ правил, формирование нового, более мощного по дедуктивным средствам исчисления $\mathcal{P}'$".

После третьего этапа происходит процесс наращивания допустимых правил в $\mathcal{P}'$, а при постановке индивидуальной задачи—синтез на основе всей имеющейся информации подходящего допустимого правила (4 и 5 этапы). Отмечая, что данное разделение в определенной степени условно, в [61] оцениваются перспективы алгоритмизации указанных этапов. К наиболее трудным этапам относятся этапы 1, 2в и 3, где «современные машины, по-видимому, не могут оказать существенной помощи». На других этапах либо уже имеется конкретное продвижение, либо оно связано с техническими трудностями, либо происходит в кооперации с человеком.

Представляется, что этапы 2—5 характеризуют различные формы адаптации комбинаторных алгоритмов при заданном исчислении. Этап 1—формирование исчисления (исходного $\mathcal{P}$ или очередного $\mathcal{P}'$) —циклически повторяется после достаточного продвижения этапов 2—5. Его можно понимать как этап адаптации представления проблемы.

Вышеизложенное в значительной мере справедливо также для шахматных проблем—ПОУ^{ш} и ПСГ^{ш}. Определенное представление о достижениях по адаптации игровых алгоритмов, главным образом шахматных, можно получить из нижеследующего обзора.

4 1. Прежде чем перейти к обзору, отметим, что в данном разделе термин «усиление» используется в несколько более широком смысле, чем это было определено в § 2.1. Дополнительно к этому определению, а также выбранному нами в § 3 критерию качества алгоритмов по среднему отклонению решений от оптимальных при фиксированном среднем времени поиска решений, здесь будет говориться об усилении алгоритмов также в нижеследующих случаях.

а. В анализируемых ниже работах вопрос о среднем времени выбора хода умалчивается. Ясно, что без фиксации этого времени основное свойство усиления (согласно § 4.1)—уменьшение среднего отклонения от оптимальных решений, становится неконтролируемым. Одновременно теряется возможность линейного упорядочения алгоритмов. Тем не менее исходя из содержания рассматриваемых работ можно предположить, что если считать среднее время равным среднему времени выбора хода для преобразованной (с целью усиления) программы, то для исходной программы такое требование не приведет к заметным преимуществам относительно среднего отклонения. Именно при таком предположении термин «усиление» будет использован ниже.

б. Во многих работах при переходе от исходного алгоритма к преобразованному происходит качественный скачок, поскольку первый из них в отличие от второго не является разрешающей процедурой для рассматриваемой задачи (например, конкретного эндшпиля в [16]). Несмотря на большую адекватность при описании таких случаев термина «развитие», тем не менее мы будем говорить об усилении.

в. Как было показано в § 5, усиление программ можно оценить посредством специальным образом организованных турниров. Эти турниры в разной мере отличаются от тех, которые описаны в реферируемых работах. Однако и в этих случаях нами используется термин усиление. Отметим также, что большинство известных в настоящее время работ по шахматному программированию посвящены решению проблемы поиска P-стратегий в графе игры—ПСГ^{ш}. Поскольку P-стратегии, в частности комбинации, относятся к знаниям шахматиста и могут служить средством усиления программ через их специальным образом организованное накопление, естественно относить работы по ПСГ^{ш} одновременно к исследованиям по синтезу

знаний и, следовательно, по адаптации. Тем не менее мы не будем в данном обзоре специально останавливаться на этих работах, так как они в достаточной мере освещены в литературе, в частности в [3].

Перейдем к непосредственному обзору работ, связанных с адаптацией в шахматах.

4.2. Значительное продвижение в исследованиях по построению усилителей связано с работой [109]. В ней рассмотрены возможности усиления алгоритмов в шашках посредством алгоритмического изменения весов в оценочном полиноме, изменения структуры полинома через замену используемых в ней предикатов, а также посредством запоминания позиции и ранее вычисленных для них оценок.

С учетом сделанного выше замечания, понятие усиления в [109] для первых двух случаев преобразования алгоритмов близко по смыслу к использованному нами. При этом в турнирах, предназначенных для оценки усиления, отсутствует предварительная настройка исходной программы на множестве начальных (тестовых, см. § 5) позиций, о выборе которых также ничего не сказано.

Третий тип усиления оценивался менее формально, а именно, через сравнение игры программы с игрой среднего новичка и рекомендациями мастеров, через способность разыгрывать дебют и распознавать выигрышность заданных позиций.

Основной вывод автора о том, что исследованные типы простых алгоритмов способны быть усилителями, представляется убедительным. Полезны также обнаруженные им нижеследующие ограничения возможностей усиления. Для первых двух типов это связано с процессом типа насыщения, когда изменения в оценочном полиноме согласно рекомендациям усилителя исчерпывают свои возможности по усилению. Для третьего типа ограничение возникает в силу превышения времени, затрачиваемого на поиск позиций с известной оценкой, относительно времени, необходимого для непосредственного вычисления оценки. При этом, поскольку рассматривался поиск по точному совпадению позиций, указанное ограничение срабатывает при объеме фонда позиций, далеко недостаточном для того, чтобы для каждой позиции запроса некоторой конкретной партии можно было бы извлечь релевантную ей позицию с оценкой.

При накоплении позиций с оценками исходный алгоритм изменяется за счет увеличения глубины фактического анализа. Этот тип изменения можно получить, видимо, простым увеличением глубины перебора в том же самом исходном алгоритме.

Если же используются позиции с рекомендациями из чужих партий, в частности более сильных, то рациональное их использование равносильно принятию решений в этих позициях по более сильной стратегии.

В обоих последних случаях усиление по существу связано с накоплением закономерностей; в первых же двух оно происходит посредством изменения алгоритма поиска в графе игры.

4.3. В зависимости от возможностей исходной программы и спо-

собов ее дальнейшего усиления в [151] выделены следующие типы программ:

1. Исходная программа обладает минимальной шахматной информацией, в частности не знает даже правил игры;

2. Правила игры априори заданы, но все принципы игры вырабатываются в процессе усиления;

3. Дополнительно к п. 2 часть принципов заранее задана: например, могут быть заданы компоненты функции оценки, а сама функция должна быть порождена на основе накопления опыта; при этом объектом оптимизации в простейшем случае могут быть весовые коэффициенты оценочной функции, а в более сложном—логические комбинации рассматриваемых признаков;

4. Исходная программа способна к усилению посредством взаимодействия с человеком;

5. В исходную программу вкладывается по возможности много знаний, а обучение ограничивается оптимизацией линейных функций;

6. Дополнительно к п.5 допускаются нелинейные функции, в частности, основанные на формировании новых понятий.

По сложности построения указанных программ первая и пятая в [151] справедливо отмечены как полярные. Для целей усиления могут оказаться полезными коллекция конкретных знаний шахматистов, в частности, типов матовых позиций и мотивов, а также общие требования к структуре шахматных программ высокого уровня, рассмотренные в [151].

4.4. В работе [16] возможность усиления алгоритмов исследовалась для игр «волки и овцы» и шахматного эндшпиля «король и пешка против короля».

Процесс усиления алгоритма белых рассматривался при решении следующей задачи L_1.

Даны начальные позиции $\xi_1, \ldots, \xi_v$ и алгоритм черных $\psi_1, \ldots, \psi_s$. Указаны также исходный АПУ белых и исследуемый усилитель ω, в которой априори не заложены сведения о структуре $\psi_1, \ldots, \psi_s$. С некоторого момента белые проводят ряд партий для каждой пары (ξ_i, ψ_j); по их результатам ω изменяет этот алгоритм. Процесс заканчивается, если построен алгоритм белых, который выигрывает у каждой пары (ξ_i, ψ_j).

Все алгоритмы белых имеют следующую общую структуру. Задается система классов $D_1, \ldots, D_m$ и их оценок $\chi_1, \ldots, \chi_n$. Для выбора хода в позиции x строятся все позиции $y_1, \ldots, y_n$, получаемые из x одним из допустимых ходов, и для каждого y_l вычисляется среднее арифметическое оценок $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_g}$ всех тех классов $D_{i_1}, \ldots, D_{i_g}$, которым принадлежит y_i; в x выбирается ход, который ведет в позицию с наибольшей оценкой указанного вида.

Работу данного алгоритма можно представить как перебор глубины 1 в графе игры, при которой строятся заключительные позиции $y_1, \ldots, y_n$ с последующей оценкой соответствующих ходов. Оценка

производится по существу посредством генерации закономерностей типа „исходная позиция $\Rightarrow$ позиция y_i“ и их сравнения с накопленными в тезаурусе. При этом хранение закономерностей основано на запоминании позиций, получаемых после применения этих закономерностей (классы $D_1, \ldots, D_m$).

Исследовались три типа усилителей — ω_1, ω_2, ω_3:

1. ω_1 изменяет оценки классов позиций; сами классы предполагаются заранее заданными и неизменными;

2. ω_2 изменяет классы позиций и их оценки; заранее заданы типические позиции классов;

3. ω_3 дополнительно к ω_2 генерирует также список типических позиций — порождающих элементов классов.

Можно сказать, что ω_1 изменяет оценки правдоподобия закономерностей, ω_2 дополнительно строит образы позиций при заданной типовой, а ω_3 дополнительно к ω_2 извлекает исходную типовую позицию и оптимальный в ней ход. Последняя процедура совершается посредством генерации позиций, ведущих к заданным матовым. В двух последних случаях априори фиксируются только списки арифметических и логических функций, описывающих элементарные свойства позиций (дескрипторы функций и предикатов).

Задача L_1 определяет некоторый турнир, в котором белые последовательно выступают против пар (ξ_i, ψ_j). Представляется, что в этом турнире имеются следующие упущения.

1. Начальные позиции каждой из проводимых партий не сбалансированы; вследствие этого усиление стратегий может быть объяснено лишь лучшим использованием конкретной начальной позиции и потому иметь лишь частное значение.

2. Усиленный алгоритм должен быть оценен по меньшей мере относительно собственного исходного представления. Такое сравнение упрощает процесс локализации причин усиления и дает большие основания считать его результатом метода усиления, а не конкретных особенностей алгоритма, в частности его исходной силы.

Усилители ω_1, основанный на методе поощрения и наказания, и ω_2, близкий к алгоритму М. М. Бонгарда, были проверены в игре «волки и овцы» для 24 алгоритмов черных («волка»), а ω_3—в эндшпиле для одной стратегии черного короля. Во всех случаях задача L_1 была решена. При этом имеются основания считать, что синтезированная в первой игре стратегия была для «овец» оптимальной. В то же время алгоритм белых в игре против человека оказался удовлетворительным лишь в сравнительно простых позициях.

Вышеуказанные исследования были продолжены в работе [17] для эндшпилей «король и ладья против короля», «король и два слона против короля», «две ладьи против короля».

Для каждого эндшпиля рассматривалась следующая задача L_2.

Дан список S матовых позиций. Построить систему классов $D_0, \ldots, D_k$ такую, что: 1) позиции класса D_i обеспечивают гаранти-

рованный выигрыш в не более чем i ходов независимо от игры черных; 2) если начальная позиция выигрышная и может быть порождена (восстановлена) из позиций S, то при любой игре черных получается одна из позиций классов $D_o, \ldots, D_k$.

Несмотря на то, что в работе не указан какой-либо беспереборный способ проверки решенности задачи L_2, конструкция ω_4 представляет интерес. Схема его работы близка к ω_3 и описывается следующим образом.

Из списка S посредством перебора порождается некоторое множество представителей классов D_i, $i=0,\ldots,k$. К ним применяется процедура расширения, основанная на построении описаний этих представителей. Полученные таким образом классы определяют алгоритм белых, который испытывается на некотором алгоритме черных. Если ход черных приводит к позиции, не содержащейся в наличных классах, то происходит новое порождение и расширение классов и т. д.

В результате экспериментов для всех указанных эндшпилей были синтезированы алгоритмы, которые представляются достаточно интересными. Однако было бы желательно иметь их более точные характеристики.

Основной результат этих экспериментов—установление фактической возможности усиления алгоритмов в играх простой структуры посредством ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, стимулирует к дальнейшему изучению использованных в этих усилителях принципов в более сложных ситуациях. В частности, процедур абстрагирования, способов представления данных, критериев существенности и устойчивости признаков и др.

4.5. В [159] рассматривается возможность построения игровой программы в эндшпиле «король и ладья против короля» не в виде процедур поиска в графе игры, а посредством накопления знаний об этом эндшпиле в специальном хранилище и построения алгоритмов поиска релевантных в анализируемой позиции знаний. Автор статьи считает, что несмотря на высокое быстродействие, программы первого типа, в отличие от второго, негибкие, трудные для понимания, документирования или проверки, и их почти невозможно наделить средствами самообучения. В то же время программы второго типа получат право на жизнь после успешного построения хотя бы одной из них для какой-либо нетривиальной проблемы. Автор различает три типа знаний: чистое запоминание специальных случаев, типы позиций или образы, теоремы (закономерности, в нашей терминологии). В [159] рассматриваются вопросы представления знаний в виде образов для «Кр и Л против $\overline{\text{К}}$р», а в [149] для эндшпилей типа «Кр и Ф против $\overline{\text{К}}$р», «Кр, С, Л против $\overline{\text{К}}$р» и др.

4.6. В [157] исследуется вопрос построения образов позиций, для которых существует выигрывающая стратегия, в эндшпиле «король и пешка против короля». Исходной информацией являются примеры выигрышных и проигрышных позиций, на основе которых обучающая программа строит необходимые образы в виде формул так назы-

ваемой переменнозначной логики. На экзаменационной выборке из 159 позиций синтезированные образы обеспечивали около 80% правильных ответов. Идеологически способ формирования образов позиций и их представление в [157] аналогичны [16].

По трудности проблем построения усилителей в [157] выделяются следующие три уровня:

0 уровень: задан язык представления ситуаций и решающие правила; обучение заключается в запоминании и выполнении этих правил;

1 уровень: в отличие от нулевого, задан только язык и примеры ситуаций, с указанием принятых в них решений; обучение заключается в синтезе решающего правила (в форме закономерности) и его запоминании;

2 уровень: язык описания ситуаций задан лишь частично; обучение предполагает формирование новых элементов языка, а затем решение задач 1-уровня.

По этой классификации, результаты [157] относятся к 1 уровню. Для решения задач генерации элементов языка предлагается следующее направление поиска.

Пусть программа генерирует элементарные предикаты, описывающие положения фигур на доске, а в памяти машин имеется ряд позиций анализируемых классов. Посредством стандартных способов комбинирования программа строит из элементарных предикатов формулы определенных типов и проверяет их выполнение для каждого из разделяемых классов позиций. Если частота выполнения превышает определенный порог, то для полученной формулы проверяется, упрощает ли она описания классов. В положительном случае она закрепляется в языке, в противном случае забывается. Первоначальные элементарные предикаты, также как и способы их комбинирования, задаются заранее, что и определяет уровень алгоритмизированности данного метода синтеза элементов языка. По существу он примыкает к методам выбора существенных признаков, исследуемых в распознавании образов, и имеет много сходного с уже известными.

4.7. Оценка правдоподобия некоторой цели в заданной позиции есть одновременно оценка возможности достижения ее из этой позиции, и это можно представить в форме закономерностей (см. § 6.5). Из известных нам работ алгоритмическое выделение релевантных в заданной позиции целей наиболее последовательно рассмотрено в [146]. При этом используется список следующих целей: нападение, предупредительная защита, номинальная защита, динамическая защита, стратегия, король под шахом. Каждая цель определяет собственную схему выбора ходов из анализируемой вершины. Например, допустимыми для цели «нападение» считаются такие ходы, которые порождают двойной удар, приводят к атакам малоподвижных фигур, порождают вскрытое нападение, освобождают клетку, которую желательно занять другой фигурой.

Для выбора релевантной в данной позиции цели используется специальная схема анализа. Анализ начинается с проверки: находится ли король под шахом? Если это имеет место, то генерируются все ходы, согласованные с целевым состоянием «король под шахом», вычисляются оценки соответствующих позиций, которые затем в порядке убывания сравниваются с наилучшей предполагаемой оценкой исходной позиции—EXPCT. Если оценка рассматриваемой позиции существенно превышает EXPCT, т. е. EXPCT плюс специальный допуск, то поиск прекращается выбором этого хода. В противном случае управление передается специальной подпрограмме—«Выяснение причин». Последняя пытается выяснить, можно ли отделить множество получаемых в позиции следствий от последнего испытуемого хода. Если удается установить, что причина их лежит вне этого хода, то происходит возвращение к исходной позиции и начинается анализ следующего целевого состояния (в данном случае «динамической защиты»). В противном случае производится переупорядочение непроверенных ходов и процедура выяснения причин повторяется для очередного хода.

Аналогичным образом анализируются и другие целевые состояния. При этом каждое текущее значение EXPCT вычисляется на основе оценок в предшествующем дереве поиска.

Представляет интерес сравнение данной процедуры выделения целей с предлагаемой нами в § 5.5. Эвристическая природа этих процедур определяет целесообразность проведения сравнений посредством турниров программ, отличающихся только подпрограммами выбора релевантных в позициях целей.

4.8. Одним из способов направленного преобразования алгоритмов с целью их усиления является подражание более сильному алгоритму на основе осмысления причин принятия им тех или иных решений. Такой способ широко применяется шахматистами в процессе обучения. Например, анализируется некоторая позиция из партии, сыгранной мастером, для которой собственные стратегии и цели сравниваются с выработанными мастером. В случае их расхождения ищется причина расхождения, в частности, в алгоритмах формирования целей и синтеза стратегий, отношении выигрышности и др. Через изменение указанных структур шахматист добивается совпадения своего решения с ходом мастера.

Усиление достигается в случае сходимости указанного процесса на достаточно большом числе партий мастеров.

Ясно, что данный способ усиления целесообразен в тех случаях, когда существует алгоритм высокой эффективности, о механизмах которого априори мало что известно. Именно при таком предположении в [160, 162] рассматриваются возможности построения усилителей, основанных на синтезе и накоплении закономерностей вида: если король и конь черных на одной линии и между ними нет фигур, то рассмотреть все ходы белой ладьи на эту линию.

Основой для выделения закономерностей являются записи ранее

сыгранных партий. Программа посредством анализа влияния одних ходов на появление других, а также угроз и взятий отмечает места возможных комбинаций и затем пытается восстановить их. Программа «поняла» комбинацию, если она сумела восстановить поддерево игры, начинающееся с данного хода партии и такое, что процедура минимакса на нем дает положительный эффект. После этого производится упрощение и обобщение дерева, в результате чего строится процедура вида: если для позиции x_1 справедливо описание F_1, то имеет смысл использовать стратегию G со свойством F_2.

Упрощение дерева комбинации производится следующим образом. Вначале в ветвях с отрицательным для противника балансом материала исключаются последние ходы, так как они уже бесполезны противнику. Затем исключаются ходы, которые не связаны с каким-либо другим ходом на дереве. Более точно знаком $\varnothing$ —«нет хода», отмечаются ходы, которые не участвуют в порождении ходов взятия в дальнейшем, не разрушают условий проведения каких-то ходов противника, сами не порождены ранее сделанными на дереве ходами. Если в результате последней процедуры знак $\varnothing$ встречается дважды подряд, то выбрасывается все нижеследующее за знаком $\varnothing$ поддерево. Результирующее дерево считается неудовлетворительным, если баланс материала по какой-то ветви не в нашу пользу. В этом случае все дерево отбрасывается. В противном случае управление передается процедуре обобщения дерева, работа которой происходит следующим образом.

1. Координаты конкретных полей, отмеченных на дереве, заменяются символами переменных, одних и тех же для одинаковых координат.

2. Если какая-то фигура встречается на дереве только один раз и если ее ход не содержит каких-либо условий на поля, участвующие в других ходах дерева, то информация об этой фигуре записывается в дереве только через указание—«фигура наша» (F) или «противника» (E).

3. Если фигура встречается только в одном ходе дерева без наложения каких-либо условий на промежуточные поля при этом ходе и если эта фигура бьется через какое-то число ходов, то она заменяется более весомой фигурой, если она принадлежит противнику, и менее весомой, если фигура наша. Соответственно на дереве рядом с этой фигурой ставится знак $\geqslant$ или $\leqslant$.

4. Если первый ход на дереве есть взятие и замена его на ход с тем же перемещением, но без взятия, не изменяет баланса в дереве, то эта замена производится.

5. Если на дереве имеются несколько подобных ходов одного и того же уровня, то все кроме одного исключаются. Например, если встречается Kab, Kac, Kad и b, c, d отмечены на дереве только один раз, то оставляется просто: ходит Ka.

После вышеуказанных процедур из исходного дерева комбинации будут исключены многие неинтересные ходы, а оставшиеся пред-

ставлены в обобщенной форме. Из полученного представления комбинации строится ее образ, под которым принимается обобщенное описание исходных позиций, к которым может быть применимо обобщенное дерево: специальным образом упорядоченный список всех ходов этого дерева и дерево последовательности этих ходов.

Возможность проведения в заданной позиции комбинации устанавливается посредством проверки в ней выполнения признаков из образа исходных позиций комбинации и ходов из дерева комбинации. При этом последняя проверка предшествует первой. В случае положительного результата рассматривается возможность генерации конкретной комбинации именно для заданной позиции [162].

Эксперименты с программой по построению образов комбинаций дали обнадеживающие результаты. При этом программа по заданной записи партии предварительно восстанавливала содержащуюся в партии конкретную комбинацию, после чего строила ее образ. Например, по записи 1.c2c4 e7e5 2.Kg1f3 Kb8c6, программа построила следующий образ:

1. Образ позиций: $a: KE$; $b: \leqslant \Pi E$; $c: KF$; d—пусто или занято противником;

2. Список обобщенных ходов: 1. $KEaxb$, 2. $KFdxb$; 3. $KFc—d$;

3. Дерево последовательности ходов: 3→1→2.

Необходимо отметить, что восстанавливалась не полная запись дерева комбинации, а только той ее части, которая более всего соответствует анализу шахматистов.

Полученные в [162] результаты носят предварительный характер. Тем не менее предложенный в работе конкретный алгоритм формирования образов комбинаций представляется весьма прогрессивным. На наш взгляд это один из немногих алгоритмов, где хоть и в интуитивной форме и для конкретных проблем, но правильно отражены понятия образов ситуаций и стратегий. Представляется, что эти понятия согласуются с определениями понятий оптимальных образов позиций и стратегий, сформулированных нами в § 4.5.

Особо интересным в [162] представляется попытка формализации весьма типичного для человека способа обучения: понимания причин некоторого явления (быть может единичного) и его обобщение. Этот способ обучения может быть эффективен даже в том случае, когда в исследуемой конкретной ситуации искомая закономерность казалось не дала требуемого результата (например, при опровержении идеи некоторой задуманной комбинации). Проблемы синтеза образов позиций и стратегий, сформулированные в § 7.5, исходят именно из единичных явлений и фактов.

Полная оценка алгоритмов синтеза вышеуказанных закономерностей связана с рассмотрением вопроса их включения в решающий алгоритм и получения глобальных оценок. Эта часть, ввиду большого требуемого объема программирования, в [160, 162] не рассмотрена.

4.9. В [3,30] рассматривается возможность усиления программ

посредством систематического устранения повторного анализа в сходных или аналогичных позициях. С этой целью производится накопление позиций с известными в них решениями и оценками этих решений, а в дальнейшем, при появлении в процессе конкретного анализа позиции, аналогичной имеющейся в справочной, принимается решение, ранее выработанное для хранимой позиции. Полное описание метода аналогий, приведенное в [3, 30], весьма «комбинаторно», что затрудняет его оценку. Тем не менее можно высказать ряд предварительных замечаний.

Как пишут авторы [3], «в основе метода аналогий лежит понятие хода, независимое от позиции, в которой он производится. Таким образом, в различных позициях можно сделать один и тот же ход. Последствия такого хода могут быть различными, но во многих позициях ход ведет к примерно одинаковым изменениям.

Пусть в некоторой позиции B ход ψ был исследован. Возникает вопрос, какие условия достаточны для того, чтобы оценка этого хода из другой позиции C была такой же, как и из позиции B. В работе формируются условия и доказывается их достаточность. Они состоят в том, что последовательность ходов, ведущая из позиции B в позицию C, не должна влиять на варианты, определяющие оценку исследуемого хода, т. е. состоять из ходов, так сказать, «не имеющих отношения» к этим вариантам».

Описанной выше процедуре принятия решений по аналогии с ранее принятыми решениями в нашей формализации § 7.5 соответствует использование закономерностей. Описание хода ψ, независимое от позиции, по существу определяет некоторую гипотезу об образе стратегий. Множество позиций, в которых ход ψ осуществим и таких, что они получаются из исходной позиции B посредством ходов, не влияющих на оценку ψ в B, определяет гипотезу об образе позиций B. При этом гипотеза об образе B строится в ограниченном языке, позволяющем описать лишь те позиции, которые связаны с B последовательностью ходов, не влияющих на оценку ψ в B. Последнее условие означает, что для всех позиций, включаемых в образ, требуется сохранение в них хода ψ с той же оценкой, что и в B. Заметим, что это требование, весьма важное при построении образов ситуаций вообще и естественным способом порождаемое при сколько-нибудь глубоком анализе шахматной игры (см. также наш обзор по [162]), как правило, отсутствует в тех работах по формированию образов, где эта проблема рассматривается изолированно, вне контекста тех глобальных целей, эффективному достижению которых должны способствовать формируемые образы. Примечательным в работе является также и тот факт, что утверждение о связи конкретной конструкции образа и стратегий, возможных в позициях этого образа, доказано в форме теоремы. Относительно эффективности усилителей, основанных на использовании аналогичных решений описанным в [30] способом, в [4] приведен предварительный результат об уменьшении в 4 раза числа построенных при переборе позиций и одновре-

менном увеличении времени анализа каждой позиции вдвое, что, видимо, соответствует уменьшению общего времени анализа вдвое.

4.10. Возможность усиления алгоритмов посредством стандартного наращивания фондов дебютных и эндшпильных знаний рассматривалась многими авторами, в частности в [3, 14, 27, 143].

Известно, что все шахматные программы чемпионата мира 1977 г. в Канаде включали дебютные справочные. Тем не менее дать достаточно объективную оценку усилительных способностей таких справочных по результатам чемпионатов представляется невозможным, а специальные исследования этого вопроса нам неизвестны.

В [14, 104, 143] накопление дебютных, миттельшпильных и эндшпильных знаний производится в форме закономерностей трех типов. Библиотека дебютов состоит из записей вида «позиция, рекомендуемый ход». В библиотеке миттельшпилей распознаватель позиций задается в виде фрагмента позиции, которая включает фигуры, фиксированные на определенных полях, и фигуры, расположенные на некотором расстоянии от заданных полей. Предполагается, что наличие указанных фигур в некоторой позиции с некоторой вероятностью связано с достижением определенного успеха в этой позиции, и потому поиск в дереве игры с участием этих фигур должен производиться в первую очередь.

В библиотеке эндшпилей каждый эндшпиль задается посредством отдельных узловых позиций, рекомендуемых в них ходов, их оценок, а также алгоритмов преобразования позиций и ходов в них, сохраняющих данные оценки. Рассматриваются преобразования сохраняющие взаимное положение фигур, а именно, сдвиги относительно вертикальной и горизонтальной осей координат, не нарушающие взаимного расположения пешек и не выводящие конфигурацию за пределы доски, симметричные отображения относительно вертикальной и диагональной осей симметрии, а также относительно горизонтальной оси с изменением цвета на противоположный.

При поиске в этой библиотеке, в частности позиций стремления, понятие сходства уточняется посредством следующих условий: совпадения фигур в позициях запроса и поискового образа; отличие в координатах не более чем у двух фигур с заданным ограничением на подвижность этих фигур.

По существу в библиотеке эндшпилей каждый распознаватель закономерности задается позицией, правилами преобразования позиции и условиями релевантности к ней. Образ же рекомендуемого решения задается конкретным ходом и правилом его преобразования в соответствии с преобразованием позиции.

Указанные выше распознаватели позиций можно рассматривать как описания в конкретном языке первого порядка, где элементарные предикаты задают в основном геометрические свойства позиции. В виду прозрачности метода построения таких описаний представляет интерес исследование их эффективности, в частности степени общности формируемых в таком геометрическом языке образов и возмож-

ности ее увеличения посредством расширения списка элементарных предикатов.

5. Исходя из вышеизложенного, сформулируем некоторые общие выводы.

1. Исследования проблемы АКА в теории алгоритмов требуют дальнейшего интенсивного развития. Большинство из вопросов этой проблемы, сформулированные в § 1.4 либо не поставлены, либо отражены в косвенной форме.

2. В теории поиска логического вывода в разной степени выявлены большинство основных направлений итеративного усиления алгоритмов поиска. Определены конкретные формальные критерии качества—длина вывода и неопределенность поиска, в рамках которых доказаны ряд теорем об усилении.

В то же время основные понятия и утверждения этой теории получены в предположении, что рассматриваемые комбинаторные проблемы представлены в виде некоторых исчислений. Это предположение не всегда кажется очевидным и требует доказательства при анализе конкретных проблем.

Критерии качества сформулированы для точного вывода, в то время как многие проблемы в реальное время могут быть решены только приближенно. Кроме того, рассмотрение разнородных компонент качества алгоритмов поиска вывода создает трудности для анализа.

Наряду с указанием конкретных направлений усиления, в частности формирование инвариантов, пополнение языка и др., необходимо сформулировать соответствующие проблемы, уточняющие эти направления.

3. Относительно хорошо исследованными являются усилители игровых алгоритмов, основанные на накоплении закономерностей и настройки весов оценочного полинома, а также связанные с их построением вопросы, в частности, синтеза закономерностей или их элементов—образов позиций и стратегий. В зачаточном состоянии находятся исследования по усилению на основе расширения языка описаний, синтеза элементов языка, извлечения закономерностей из шахматных текстов и др. Критерии усиления основаны либо на подражании шахматным турнирам, без их математического обоснования, либо на демонстрации возможности получения решений отдельных индивидуальных задач с определенными характеристиками процесса вычисления, как правило, без указания значений других характеристик, зависящих от первых.

Отсутствуют уточнения понятий данных, рассматриваемых как знания относительно исходного алгоритма, типов таких данных и соответствующих проблем их синтеза. Поскольку известные интуитивные представления имеют глубокие корни в опыте шахматистов, они до определенного уровня служат достаточным ориентиром в исследованиях. Однако глубокие, обоснованные результаты, дающие возмож-

ность обобщить их на другие проблемы, требуют необходимых уточнений понятий и математических постановок проблем.

Наши исследования имеют целью устранить некоторые из выявленных пробелов в теории АКА. Ранее, в главе 2, было дано единое представление в форме ПРО для многих разнородных комбинаторных проблем, введены однородные критерии усиления для проблем в точной и приближенной постановках, описаны процедуры оценивания сложности ПРО и даны конкретные оценки. В данной главе были введены понятия знания, определены типы исследуемых усилителей и вопросы теории АКА, сформулированы локально проверяемые достаточные условия усиления шахматных алгоритмов и доказана разрешимость проблемы адаптации в шахматах. В последующих главах будут уточнены типы структур данных, которые целесообразно исследовать как знания, поставлены проблемы синтеза этих структур и описаны алгоритмы, основанные на комплексном использовании указанных структур. Будут описаны также пакет программ для проведения экспериментов по адаптации комбинаторных алгоритмов управления и некоторые из приложений проводимых исследований.

Глава 5

СТРУКТУРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ <ЗНАНИЙ>

§ 1. Язык представления < знаний >. Структура описаний

1. В данной главе будет рассмотрен ряд конструкций, описывающих типы знаний, которые извлекаются, накапливаются и используются при решении комбинаторных проблем управления. Как правило, эти конструкции будут определены в общей форме и применимы, вообще говоря, к произвольным проблемам указанного типа. Однако, поскольку основой для них послужили шахматные знания, для каждой конструкции будет дана только шахматная интерпретация. Более того, многие понятия в целях удобства изложения будут определены лишь для шахмат, точнее, для ПОУ^{ш}.

Необходимо отметить, что в данной главе термин <знание> имеет смысл типа данных, используемых шахматистами в игре и предположительно улучшающих ее. Отнесение этих данных к знаниям в уточненном нами в § 3.4 смысле требует специального рассмотрения.

2. Пусть L—язык первого порядка, в котором число всех функциональных и предикатных символов конечно.

Структуру $\mathcal{A}^*$ для L определим согласно [136], а именно, $\mathcal{A}^*$ состоит из следующих объектов: (i) непустого множества $\mathcal{A}$, называемого *универсумом* $\mathcal{A}^*$; элементы из $\mathcal{A}$ называются *индивидами* структуры $\mathcal{A}^*$; (ii) n-арной функции f^* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ для каждого n-арного функционального символа f из L; в частности, e^* является индивидом из $\mathcal{A}^*$ для каждого 0-арного функционального символа e (константы) из L; (iii) n-арного предиката p^* на $\mathcal{A}$ для каждого n-арного предикатного символа p из L, отличного от „=".

Для каждого индивида a из $\mathcal{A}^*$ выберем новую константу, называемую *именем* a, и обозначим через $L(\mathcal{A}^*)$ язык, полученный из L добавлением всех имен индивидов из $\mathcal{A}^*$. *$\mathcal{A}^*$-частным случаем* формулы B назовем любую замкнутую формулу вида $B[i_1, \ldots, i_n]$ языка $L(\mathcal{A}^*)$, где n—арность B, а $i_1, \ldots, i_n$—произвольные имена из $L(\mathcal{A}^*)$, подставленные вместо переменных формулы B в соответствии с областями осмысленности этих переменных. (Последнее понятие формализуется в многосортной логике предикатов.)

Истинностное значение $\mathcal{A}^*(B)$ для каждой замкнутой формулы B определяется естественным образом.

Полагая универсум $\mathcal{A}$ конечным, мы получим, что формулы вида $\exists xB$ эквивалентны формулам $\bigvee_{i\in A} B[i]$, а формулы $\forall xB$ — формулам вида $\&_{i\in A} B[i]$, где i — имена индивидов из $\mathcal{A}$. Указанные эквивалентности позволяют при конечном $\mathcal{A}$ каждую формулу из $L(\mathcal{A}^*)$ представить в эквивалентной ей конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.). Ясно, что число таких к. н. ф. конечно.

В дальнейшем изложении рассматривается конечный универсум $\mathcal{A}$ и предполагается, что формулы из $L(\mathcal{A}^*)$ представлены в к. н. ф. Напомним, что дизъюнктами называют подформулы к. н. ф., разделенные друг от друга двумя последовательными конъюнкциями.

3. Предполагается, что рассматриваемый нами универсум $\mathcal{A}$ можно породить из некоторого множества $\mathcal{A}_0$ такого, что $\mathcal{A}=\mathcal{A}_0\cup\mathcal{B}(\mathcal{A}^0)\cup D_1\bigcup_{i=1}^{k} D_2^i\cup\mathcal{B}(\bigcup_{i=1}^{k} D_2^i)$, где k — натуральное число, $\mathcal{B}(X)$ — булеан множества X, $D_1=\mathcal{A}_0\times\mathcal{A}_0$, $D_2=\mathcal{B}(D_1)$.

В дальнейшем изложении. если специально не оговорено, исследуются индивиды одного из выделенных выше типов.

Разложением $R(a)$ индивида a назовем имена всех индивидов множества $R'(a)$, которое определяется в соответствии с выполнением для a одного из указанных ниже условий следующим образом:

— если $a\in\mathcal{A}_0$, то $R'(a)=\{a\}$;

— если $a\in\mathcal{B}(\mathcal{A}_0)$, то $a=\{a_1,\ldots,a_r\}$, $a_i\in\mathcal{A}_0$, $r\leqslant|\mathcal{A}_0|$ и
$$R'(a)=\{a, a_1,\ldots,a_r\};$$

— если $a\in D_1$, то $a=(b, c)$, $b, c\in\mathcal{A}_0$, $R'(a)=\{a, b, c\}$;

— если $a\in D_2^n$, то $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $a_i=\{b_1^i,\ldots,b_{r_i}^i\}$, $b_j^i=(c_j^i, d_j^i)$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,r_i$; $a_i\in\mathcal{B}(D_1)$ $b_j^i\in D_1$, c_j^i, $d_j^i\in\mathcal{A}_0$ и $R'(a)=\{a, a_1,\ldots,a_n\}\cup(\bigcup_{i=1}^{n} R'(a_i))$, где $R'(a_i)=\{b_1^i,\ldots,b_{r_i}^i\}\cup(\bigcup_{j=1}^{r_i}\{c_j^i,d_j^i\})$;

— если $a\in\mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{k} D_2^n)$, то $a=\{a_1,\ldots,a_m\}$, $a_i=(b_1^i,\ldots,b_{t_i}^i)$, $t_i\leqslant k$, $i=1,\ldots,m$; $b_j^i\in\mathcal{B}(D_1)$ и $R'(a)=\{a, a_1,\ldots,a_m\}\cup(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{t_i} R'(b_j^i))$.

Разложение $R(P)$, например для эндшпильной позиции P „Kp и Л против $\bar{K}p$“, есть следующее множество: $\{P\}\cup\{\langle x, y\rangle\}\cup\{Kp$, Л, $\bar{K}p\}\cup\{x\}$, где $\langle x, y\rangle$ задает пару „клетка x, фигура y“ для позиции P, а $\{x\}$ — множество всех клеток доски.

4. *Полным описанием* $D(a)$ *индивида* a *в языке* $L(\mathcal{A}^*)$ назовем множество из всех неэквивалентных истинных в $\mathcal{A}^*$ замкнутых формул (к. н. ф.) с хотя бы одним вхождением в них имени из $R(a)$. Легко видеть, что в полное описание индивида войдут все предикаты из L, распознающие индивиды из $R(a)$.

Произвольное подмножество $D(a)$ назовем *частичным описанием* a или просто *описанием* a. Например, словесным эквивалентом

такого описания для некоторой позиции P может служить следующее предложение: „белые владеют центром в позиции P, но у них есть изолированная пешка и король находится под сильным фигурным давлением“.

Описанием множества индивидов $\{a_1, \ldots, a_r\}$ назовем произвольное подмножество $\bigcup_{i=1}^{r} D(a_i)$, где $D(a_i)$ — полное описание a_i.

В дальнейшем, как правило, нами рассматриваются описания индивидов, компоненты которых — замкнутые формулы, истинны одновременно. Поэтому описания индивидов будут представляться нами в форме конъюнкций замкнутых формул, быть может, с упорядочением, индуцированным некоторым линейным порядком, на множестве всех неэквивалентных к. н. ф. языка $L(\mathcal{A}^*)$. Заметим, что такое упорядочение позволяет перейти к эквивалентному представлению описаний индивидов в форме булевых векторов, если принять, что „1“ или „0“ в i-ой позиции вектора указывают на выполнение или нет i-ой к. н. ф. для заданных индивидов. Указанные описания в форме булевых векторов широко используются в теории распознавания образов.

Для произвольного описания $E(a)$ индивида a подмножество $E^c(a)$ из всех тех элементов $E(a)$, в котором нет вхождений имен других, отличных от элементов $R(a)$, индивидов, назовем *собственным описанием a относительно* $E(a)$, а множество $E^k(a) = E(a) \setminus E^c(a)$ — *контекстом a относительно* $E(a)$.

Формула E языка $L(\mathcal{A}^*)$ *применима к индивиду* a, если хотя бы один $\mathcal{A}^*$-частный случай E, получаемый подстановкой имен из разложения $R(a)$ вместо соответствующих переменных в E, истинен.

Каждой формуле E соответствует множество всех тех индивидов, к каждому из которых E применима. Это множество будем называть *E-классом*.

Формулу E языка $L(\mathcal{A}^*)$ назовем *описанием* в $\mathcal{A}^*$, если E применима к хотя бы одному индивиду из $\mathcal{A}$.

Как было отмечено выше, при анализе формул, в частности, описаний, предполагается стандартная форма их представления в конъюнктивной нормальной форме. Элементы к. н. ф. как описания класса индивидов можно интерпретировать следующим образом. Каждый дизъюнкт, включенный в к. н. ф., фиксирует некоторые характеристики индивидов, в определенном смысле равносильные между собой. Выполнение одной из атомарных формул дизъюнкта, неважно какой, обеспечивает истинность всего дизъюнкта, что приводит к определенной инвариантности к. н. ф. к преобразованиям индивидов. В то же время каждый дизъюнкт в целом указывает на свойство, выполнение которого обязательно для отнесения индивида к классу.

Отметим, что наряду с описаниями в форме к. н. ф. нами будут использоваться описания в эквивалентной форме множества дизъюнктов этих к. н. ф.

5. С предложенной формализацией понятия «описания индивида» можно связать следующее представление о процессе расчленения человеком среды на индивиды и отношения между ними.

Среда—вещь в себе. Субъект в процессе и для достижения своих основных, врожденных и приобретенных целей взаимодействует со средой, в результате чего он получает возможность выделить, распознать части среды разной степени полезности. В дальнейшем субъект исследует и запоминает возможности и средства преобразования одних выделенных частей среды в другие, а также степень полезности для себя различных совокупностей этих частей. Распознавание частей среды одинаковой полезности, их отношений друг с другом и с самим субъектом, а также преобразование одних частей в другие происходит посредством специальных алгоритмов, называемых нами дескрипторами (см. § 5).

Размельчение, дискретизация среды на части происходит постепенно и является характеристикой уровня развития взаимодействия субъекта со средой. Вначале фиксируются дескрипторы, выделяющие части среды с очевидной полезностью. Впоследствии происходит как детализация первых, так и выделение частей среды, причинно связанных с ними. Детализация происходит по мере того, как выясняется, что не все ранее выделенные и отождествленные части среды соответствуют ожидаемым от них свойствам.

Множество всех распознаваемых в среде частей образуют универсум, а сами эти части называются индивидами.

Вообще говоря, термин «индивид» ассоциируется со свойством неразложимости, неделимости на более элементарные части. Более адекватен термин «конструктивный объект», используемый в [38, 57]. Тем не менее, оставаясь в рамках понятий, используемых в [136], распознаваемые части среды будут называться нами «индивидами».

Язык первого порядка является средством представления дескрипторов, при котором базисным дескрипторам сопоставляются предикаты, составным—формулы, а преобразованиям—функции. При этом вместо каждой n-местной функции может рассматриваться эквивалентный ей $n+1$-местный предикат. Специфика нашего представления дескрипторов многоместных отношений состоит в том, что области осмысленности одних переменных задаются как разложения индивидов, ранее выбранных.

Для обеспечения замкнутости исследований в языке каждый индивид вводится в него посредством собственного имени.

Ясно, что в конкретно используемом языке не обязательно должны присутствовать все предикаты, распознающие индивиды определенных типов. Такое пополнение языка может происходить по мере необходимости. Описание (дескриптор со свободным вхождением переменных) выделяет классы индивидов одинакового назначения, одинаковой полезности.

Описание индивида (множество замкнутых формул)—сообщение о наличии некоторой вполне конкретной части среды (индивида). Кон-

кретные индивиды известны субъекту только через свои описания. Алгоритмы построения описаний в соответствии с заложенными в них принципами, отражающими назначение этих описаний, по существу указывают на все истинные для заданных индивидов конкретные формулы.

Заметим, что полные описания индивидов строятся нами в множестве всех неэквивалентных к. н. ф. языка $L(\mathcal{A}^*)$, а не только в множестве атомарных формул, как это принято во многих работах по распознаванию образов. Наш подход исходит из того, что в описаниях индивидов должны быть указаны все истинные для них дескрипторы. В языке же $L(\mathcal{A}^*)$ дескрипторам свойств индивидов, в общем случае, соответствуют формулы, а в нашем рассмотрении—к. н. ф.

Заметим также, что требование одновременной истинности всех дескрипторов в описаниях порождает предположение о возможности перехода от принятой нами формы описания к эквивалентной, составленной только из неповторяющихся дизъюнктов к. н. ф., включенных в описание. Однако в действительности эквивалентность при таком переходе нарушается, поскольку теряется информация об истинности или нет некоторой к. н. ф. в целом.

Вышеизложенное описание процесса выделения индивидов и отношений относилось к взаимодействию субъекта со средой. При переходе к формальным моделям рассматриваемых нами комбинаторных оптимизационных проблем универсумом естественно считать множество записей—входных, выходных и тезауруса, а аналогом субъекта—некоторый заданный исходный алгоритм решения проблемы вместе со специализированным преобразователем, предназначенным для усиления алгоритма.

6. Для шахматной игры универсум $\mathcal{A}$ содержит, в частности, следующие множества индивидов:

1) множество клеток $\mathcal{A}_{01}$; каждая клетка задается парой (k, l), $k, l=1, \ldots, 8$;

2) множество цветов $\mathcal{A}_{02}$; $\mathcal{A}_{02}=\{Б, Ч\}$;

3) множество фигур $\mathcal{A}_{03}=\{П_1, \ldots, П_8, C_1, C_2, K_1, K_2, Л_1, Л_2, Ф, Kp, \overline{П}_1, \ldots, \overline{П}_8, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{Л}_1, \overline{Л}_2, \overline{Ф}, \overline{Kp}, \Lambda\}$, где $П_i$—пешка, C_j—слон, K_j—конь, $Л_j$—ладья, $i=1, \ldots, 8$, $j=1, 2$; Ф—ферзь, Kp—король (все белого цвета), Λ—пустая фигура, $\overline{x}$—фигура x черного цвета;

4) натуральные числа $0, 1, \ldots, k$;

5) $\mathcal{B}(\mathcal{A}_{01})=\mathcal{A}_2$—подмножества клеток.

6) $\mathcal{B}(\mathcal{A}_{03})=\mathcal{A}_3$—подмножества фигур;

7) $\mathcal{A}_{01}\times\mathcal{A}_{03}=D_1$—клетки, занятые определенными фигурами;

8) $\mathcal{B}(D_1)=D_2$, содержащий позиции;

9) $D_2\times D_2\times \ldots \times D_2=D_2^n$, $n=1, \ldots, k$, содержащие последовательности позиций, партии;

10) $\mathcal{B}(\bigcup\limits_{n=1}^{k} D_2^n)=D_3$, содержащий подграфы шахматного графа игры, в частности, множества позиций.

Константа κ определяется наибольшим числом, которое может быть использовано при построении шахматных стратегий в доступных нам шахматных алгоритмах синтеза стратегий.

Функциями на $\mathcal{A}$ являются, в частности, следующие:

1. $\langle$цвет $x\rangle$, $x \in \mathcal{A}_{01} \cup \mathcal{A}_{03}$;
2. $\langle$ценность $x\rangle$, $x \in \mathcal{A}_{03}$;
3. $\langle$ценность x в $y\rangle$, $x \in \mathcal{A}_{03}$, $y \in D_2$;
4. $\langle$количество ударов на $(i, j)\rangle$, $(i, j) \in \mathcal{A}_{01}$, и др.

Атомарными формулами на $\mathcal{A}$ являются, в частности, следующие:

1. $\langle x$ есть клетка$\rangle$, $x \in \mathcal{A}_{01}$;
2. $\langle x$ есть позиция$\rangle$, $x \in D_2$;
3. $\langle x$ есть доска$\rangle$, $x \in \mathcal{A}_2$;
4. $\langle x$ есть горизонталь$\rangle$, $x \in \mathcal{A}_2$;
5. $\langle x$ есть белая фигура$\rangle$, $x \in \mathcal{A}_3$;
6. $\langle$клетка x занята$\rangle$, $x \in \mathcal{A}_{01}$.

К составным формулам на $\mathcal{A}$ можно отнести следующие:

1. $\langle x$ получено из y ходом белых$\rangle$, x, $y \in D_2$;
2. $\langle x$ получено из y взятием фигуры v фигурой $z\rangle$, x, $y \in D_2$, z, $v \in \mathcal{A}_{03}$;
3. $\langle x$ есть позиция с матом для белых$\rangle$, $x \in D_2$;
4. $\langle$в x есть сдвоенная пешка$\rangle$, $x \in D_2$;
5. $\langle x$ есть партия$\rangle$, $x \in D_2^n$;
6. $\langle x$ есть стратегия$\rangle$, $x \in D_3$ и др.

Формализованные нами шахматные функции, атомарные формулы и формулы составные приведены в [96]. Ясно, что они составляют часть шахматных знаний и могут пополняться не только за счет формализации известных шахматистам, но и посредством формирования новых.

Заметим, что разбиение шахматных отношений на классы, представимые атомарными или составными формулами, довольно относительно и может измениться в зависимости от возможностей интерпретатора. Например, $\langle x$ есть доска$\rangle$ может быть задан как одноместный предикат, но может быть представлен и через конъюкцию предикатов типа: $\langle x$ есть клетка$\rangle$ $\&\langle x = (\alpha, \beta)\rangle$, где $\alpha, \beta = 1, \ldots, 8$.

§ 2. Отношение выигрышности. $\langle P, F, L\rangle$-стратегии и их объединения

1. *Пусть* $\mathcal{F}$ — множество всех описаний. Мы полагаем, что на множестве $\mathcal{F}$ задан частичный порядок θ_1 — *отношение выигрышности.* Отношение θ_1 отражает наше наличное знание и способность конкретного использования объективно существующего порядка на множестве индивидов относительно их возможностей и связей с выигрышными, ничейными или проигрышными позициями. В частности, на множестве описаний позиций θ_1 отражает степень близости позиций, выделяемых заданными описаниями, к целевым (матовым, ничейным), степень

гарантированности перехода от них к целевым и трудность такого перехода.

Ясно, что θ_1 по мере роста нашего опыта и возможностей совершенствуется. θ_1 является составной частью АПУ и его конкретный выбор в значительной мере определяет содержание этих алгоритмов.

Так например, если θ_1 выделяет классы выигрышных и ничейных позиций, т. е. позиций, для которых существует выигрышная (ничейная) стратегия белых независимо от игры черных, то тем самым определяется существенная компонента идеального АПУ.

В нашем рассмотрении отношение выигрышности θ_1 будет задаваться посредством *алгоритма упорядочения описаний* (АУО), который упорядочивает произвольную заданную пару описаний, если они сравнимы, либо указывает на их несравнимость.

Выбор конструкции АУО определяется множеством $\mathcal{F}$, в частности мощностью $\mathcal{F}$. АУО может быть описан, например, через задание θ_1 на множестве предикатов непосредственно списком и алгоритмом сравнения сложных описаний (формул и множеств формул) посредством сопоставления их компонент на основе указанного списка.

В работах [2, 134] и др. отношение θ_1 определяется посредством отображения множества позиций в множество чисел—оценок позиций. С этой целью выбирается некоторый оценочный оператор, который индексирует анализируемую позицию в фиксированном списке предикатов и затем вычисляет их взвешенную сумму—оценку позиции.

В [44] справедливо отмечено, что указанный оценочный оператор отражает лишь усредненные соотношения между возможностями позиций и соответствующих им описаний, и потому его оценки для конкретных позиций часто неверны. Там же предложена идея оценки позиций на основе подсчета результатов размена на полях.

В целом, структура отношения θ_1, процессы его порождения и развития требуют дальнейших исследований. При этом могут оказаться полезными как идеи из [44], так и работы [2, 134].

2.1. *Алгоритмом построения описаний* (АПО) назовем произвольный алгоритм, который каждому подмножеству индивидов из $\mathcal{A}$ ставит в соответствие некоторое его описание.

Для заданных позиции P, описания F, натурального числа l и АПО ψ стратегия G из P *l-устойчиво достигает* F, если $\psi(G)$ не хуже F относительно отношения выигрышности θ_1 и существует стратегия G_1, которая получается из G присоединением к концевым вершинам G стратегий глубины не менее l и таких, что $\psi(G_1)$ не хуже F относительно θ_1.

Стратегию G назовем *$\langle P, F, l\rangle$-стратегией,* а при $l=0$ параметр l будем опускать.

В $\langle P, F, l\rangle$-стратегии G описание F может иметь, например, следующий вид:

1. F: „обеспечена безопасность короля“,

$\psi(G)$: „обеспечена безопасность короля и атакован король противника“, где ψ—АПО;

2. F: „обеспечен пат“,

$\psi(G)$: „обеспечен мат“,

l: произвольно.

В дальнейших рассмотрениях АПО предполагается фиксированным и без особой необходимости не будет упоминаться.

2.2. *Слиянием множества стратегий* $T=\{G_1, \ldots, G_r\}$ с параметрами $\langle P_1, F_1, l_1\rangle, \ldots, \langle P_r, F_r, l_r\rangle$ соответственно или *T-слиянием* назовем подграф H графа игры, обладающий следующими свойствами:

1) $V(H)\supseteq\{P_1, \ldots, P_r\}$, где $V(X)$—множество вершин графа X,

2) пусть $A(P)$—множество всех стратегий из T, которые содержат позицию P с ходом белых и $F_{i_1}=\max\limits_{G_j\in A(P)} F_j$ относительно θ_1; тогда ход белых из P и соответствующие подграфы с корнем в P для H и G_{i_1} совпадают.

Если $F^*=\min\limits_{\theta_1}\{F_1, \ldots, F_r\}$, $l^*=\min\{l_1, \ldots, l_r\}$ и $\mathcal{P}$—подмножество всех позиций из $V(H)$ с ходом белых, то компоненты тройки $\langle\mathcal{P}$ F^*, $l^*\rangle$ назовем *параметрами* T-слияния. При этом параметр $\mathcal{P}$ можно заменить описанием $\mathcal{P}$.

Если F_i есть описание ветвей G_i, $i=1, \ldots, r$ и описывает наименьший успех, который можно ожидать при стратегии G_i, то F^* получает аналогичный смысл для H.

Заметим, что точнее было бы F^* и l^* задавать через минимум по множеству стратегий, реально включенных в H.

T-слияние стратегий H *применимо к описанию* позиций E, если хотя бы одна позиция, к которой применимо E, принадлежит $\mathcal{P}$.

Множество всех слияний стратегий будем обозначать через D_3^1. Согласно определению § 1, элементы D_3^1 являются разновидностью индивидов и $D_3^1\subset D_3\subset\mathcal{A}$.

Будем говорить, что алгоритм H *вычисляет* $\langle E, F, l\rangle$ *слияние стратегий* H', если каждой позиции из области применения описания E алгоритм H ставит в соответствие ход согласно H', а в остальных случаях выдает некоторое фиксированное сообщение.

3. Представляется, что шахматные понятия «форсированный вариант», «комбинация», «решения задачи, этюда, эндшпиля» и др. могут быть уточнены как определенные разновидности $\langle P, F, l\rangle$-стратегий либо некоторых элементов таких стратегий. Действительно.

3.1. *Форсированный вариант* (ф. в.) можно описать $\langle P,F,l\rangle$-стратегией G со следующими свойствами:

1) полустепени исхода вершин G в среднем малы;

2) если полустепень исхода некоторой вершины G велика, то длины большинства веток, начинающихся в этой вершине, малы;

3) общее число вершин G мало;

4) F является описанием типа: «выигрыш фигуры», «мат», «ничья», «захват центра» и др.

Полустепени исхода в вершине с ходом черных характеризуют всевозможные ответы противника на наш ход.

Малая величина полустепеней исхода объясняется тем, что ходы противника в определенной степени являются вынужденными, в частности ответами на шах, угрозу взятия фигуры или мата, стеснения короля и др.

Заметим, что в шахматной литературе ф. в. понимается как ветка, мы же говорим о ф. в. как о графе. Представляется, что ф. в. в шахматах есть описание самой длинной и нетривиальной ветви форсированной $\langle P, F, l \rangle$-стратегии.

3.2. *Комбинация* есть разновидность форсированной $\langle P,F,l \rangle$-стратегии, в одной из веток которой произведена жертва некоторой ценности (пешки, фигуры, качества и др.). При этом понятие жертвы ценности B можно уточнить следующим образом:

B есть *жертва* в позиции P, если ни в одной ветке из P малой длины компенсировать B невозможно.

Заметим, что если ценность B можно компенсировать в каждой ветке из P малой длины, то говорят *о размене* B.

Приведем некоторые сразнительные характеристики комбинаций из [161]:

индекс G	N	NR	DR	MER	F
M39	2157	135	11	17	„выигрыш коня“
E 42	305	35	7	8	„выигрыш фигуры“
M42	22223	2454	23	26	„мат“,

где N—число вершин подграфа игры глубины DR с корнем в исходной позиции P; NR—число вершин $\langle P, F, l \rangle$-стратегии, описывающей комбинацию G; MER—максимальная полустепень исхода для G.

Заметим, что данные получены в результате машинного решения 181 комбинации, а характеристики последней строки относятся к комбинации с максимальными параметрами рассматриваемого типа. При этом в вершине со степенью 26, 15 веток, исходящих из нее, имели длину 1.

Числа NR характеризуют, вообще говоря, возможности человека при анализе, обнаружении и запоминании комбинаций.

Это не означает, конечно, что комбинация *M42* получена на основе анализа и последующего запоминания всех 2454 позиций.

Отметим, что утверждение о малости длины анализируемой ветви, вообще говоря, относительно и определяется возможностями конкретного человека или системы управления к такому анализу.

3.3. *Шахматная задача* определяется требованием найти $\langle P,F,l \rangle$-стратегию, в которой описание F соответствует мату. Как правило, глубина искомой стратегии в задачах не превышает 5, полустепени исходов вершин малы и соответствуют форсированным ходам. Однако встречаются задачи с «тихими», не форсированными ходами, которые придают им особую красоту.

3.4. *В шахматных этюдах* в отличие от задач допускаются также описания F, соответствующие ничьей. Глубина стратегий в этюдах может превышать 30 полуходов, а полустепени исходов вершин больше, чем для задач, и соответствуют не только форсированным ходам.

3.5. *Эндшпильной позицией* назовем произвольную позицию с числом фигур порядка 10.

Эндшпильная стратегия есть разновидность $\langle P, F, l \rangle$- стратегии, где P есть эндшпильная позиция и F соответствует мату или ничье.

Ясно, что в эндшпильных позициях с проигрышем белых $\langle P,F,l \rangle$-стратегии для белых отсутствуют. Заметим, что эндшпильным стратегиям «Кр и Л против $\overline{\text{К}}$р», «Кр, С, К против $\overline{\text{К}}$р» и др. в шахматном смысле в нашей формализации соответствуют слияния $\langle P, F, l \rangle$-стратегий.

3.6. *Дебют*—произвольная ветка ходов из начальной позиции и длиной порядка 15 полуходов. *Дебютная стратегия*—произвольная P-стратегия из начальной позиции с определенными описаниями конечных вершин и глубиной порядка 15÷20 полуходов.

В шахматах некоторые начальные ветки дебютной стратегии до глубины 3—5 имеют собственные имена (например, «дебют староиндийская защита»), а продолжения этих веток имеют дополнительное название—дебютный вариант (например, вариант четырех пешек, система Авербаха и др. в рамках староиндийской защиты).

Многие позиции глубины 3—5 сравнительно хорошо исследованы и называются *типовыми* позициями дебюта. Аналогичные концевые позиции дебютной стратегии часто называют *табиями.*

В настоящее время известно более 50 дебютов, которые делятся на три класса: *открытые (1. е2е4 е7е5), полуоткрытые (1. е2е4* и произвольный ход черных), *закрытые* (белые начинают не с *е2е4*).

Отметим, что разыгрывание определенных дебютов приводит, как правило, к типовым позициям в миттельшпиле. Кроме типа дебюта их появление обусловлено также выбранными дебютным вариантом, стратегическим планом и его конкретным разложением на микропланы. Близость миттельшпильных позиций понимается в смысле близости их описаний, компонентами которых, в частности, являются указания на владение определенными линиями, диагоналями, важными полями, положения определенных фигур на флангах или в центре, направленность ударов фигур, близость пешечных структур, одинаковые сильные или слабые места в расположении короля и т. п.

Типичные миттельшпильные позиции составляют один из важных видов шахматных знаний. Они относятся к позициям *стремления,* т. е. позициям, к которым шахматист сознательно стремится в процессе игры. Для таких позиций шахматист запоминает не только способы их достижения, но, что особенно важно, дальнейшие планы игры и даже конкретные оптимальные стратегии.

3.7. *Ловушка*—P-стратегия, в которой после удаления малого числа ребер с ходом черных и соответствующих им подграфов остают-

ся только l-устойчивые конечные позиции с описаниями не хуже F для некоторых заданных l и F.

Смысл западни в термине «ловушка», видимо, связан с тем, что типовое мышление черных приводит их к выбору веток, благоприятных для белых, в то время как в тех же позициях можно было бы избежать их.

3.8. *Результат анализа позиции* P—подграф G' некоторой стратегии G с началом P и со следующими свойствами:

1) корень P' для G совпадает с P;

2) G' содержит, как правило, одну полную ветку B из G;

3) все ветки с началом в P' и отличные от B имеют малую длину и описания не хуже описания B (относительно θ_1);

4) для каждого яруса G с ходом черных ветка B проходит через ту позицию, в которой описание (для белых) наихудшее (относительно θ_1).

Ясно, что упорядочение θ_1 предполагается для конкретного игрока.

3.9. *Партия из сборника „Информатор"*—партия, для некоторых позиций которой приведены результаты анализа комментатора, а также его словесные оценки, характеризующие возможность выигрыша из этих позиций или более интересных продолжений.

Вот как выглядит фрагмент записи партии из „Информатора":

*R*00 1. Ларсен—Гарсиа *С.*, Пальма де Мальорка, 1971.

1. *b*3 *e*5 2. *Cb*2 *Kc*6 3. *e*3 *Kf*6 [3. ... *d*6!?] 4. *Cd*5 *d*6

5. *Ke*2!? [Δ5 ... *Cd*7 6. *f*4!?Δ*d*4] *g*6!?

6. и т. д.

*R*00 указывает на дебютную систему и вариант, а знаки !, ?, Δ соответственно означают: „очень хороший ход", „плохой ход", „с идеей".

3.10. *Фрагмент сыгранной партии* с началом в позиции P есть некоторая ветка ходов и соответствующих им позиций, полученных согласно определенной последовательности стратегий.

§ 3. Цели и планы

1. Как уже говорилось в § 1, в процессе оптимизации алгоритмов управления выделяются индивиды, определенным образом связанные с целевыми ситуациями проблемы либо с некоторыми другими индивидами, ценность которых относительно целевых ситуаций установлена ранее. Описания таких индивидов, в частности ситуаций, понимаются нами как описания промежуточных или локальных целевых индивидов, а процедуры, определяющие связь заданных индивидов с другими индивидами известной ценности, как описания определенного смысла

этих индивидов. Уточним представление об описании целевых индивидов типа «ситуации в ПОУ^{ш}» посредством следующего индуктивного определения. Понятие смысла ситуаций будет введено в § 4.

Произвольное описание E целевых позиций ПОУ^{ш} одного и того же типа, т. е. либо с матом черным, либо с матом белым, либо ничейных, назовем $\langle E, l^* \rangle$-*целью*, где l^*—глубина дерева игры.

Пусть F—$\langle F_1, l_1 \rangle$-цель, где F_1—описание ситуаций, а l_1—натуральное число. Произвольное описание E назовем $\langle F, l \rangle$-*целью*, если при мощности E-класса n можно указать натуральные числа $m \leqslant n$ и l такие, что для каждой позиции P E-класса с частотой m/n существует некоторая $\langle P, F, l \rangle$-стратегия. Параметры F и l в $\langle F, l \rangle$-цели E указывают на связь E с ранее порожденными описаниями целевых ситуаций. При отсутствии необходимости в такой характеризации произвольную $\langle F, l \rangle$-цель E будем называть просто *целью*.

Цель F назовем *глобальной* (г.ц.), если F-класс состоит из однотипных целевых позиций проблемы; в противном случае F назовем *локальной целью* (л.ц.). Содержательно, л.ц. выделяют позиции, связанные тем или иным образом с достижением г.ц. Определение целей одновременно является некоторой гипотезой о способе их порождения. Она может быть уточнена, например, следующим образом.

Г.ц. являются априори заданными или врожденными. Л.ц. первого порядка (л.ц.1) получаются как описания позиций, из которых существуют стратегии, обеспечивающие г.ц. При этом в зависимости от минимальной глубины таких стратегий можно различать л.ц. различной «силы» или «степени выигрышности».

К л.ц.2 можно отнести как описания позиций, допускающих достижение л.ц.1, так и достижение г.ц. Для позиций, выделяемых л.ц.1 или л.ц.2, стратегии, ведущие к г.ц. могут существовать не во всех случаях, а в соответствии с некоторой недетерминированной закономерностью (см. § 6).

Л.ц.3 можно выделить как описания позиций, допускающих достижение л.ц.2, л.ц.1 или г.ц и т. д.

Отметим, что конкретное представление генезиса целей существенно влияет на определение отношения выигрышности θ_1 на множестве целей.

Отметим также, что использование л.ц. основано на предположении о том, что существует последовательность л.ц., каждая из которых способствует и в совокупности с другими обеспечивает выполнение глобальной. При этом каждый шаг по реализации л. ц. применяет эвристику «лучше синица в руках, чем журавль в небесах».

Неформально мы будем говорить также *о стратегических* (или дальних) и *тактических* (или ближних) относительно заданной позиции Р целях, в зависимости от нижней границы глубины стратегий, при которых эти цели могут быть достигнуты из этой позиции. Вооб-

ще говоря, по вышеуказанному критерию можно рассматривать цели дальности d.

Произвольную конечную последовательность целей назовем *планом,* если она согласована с отношением выигрышности θ_1, т. е. в ней отсутствуют пары целей F_1, F_2 такие, что либо F_1 несравнима с F_2, либо F_1 сильнее F_2 относительно θ_1, но F_2 расположена в плане правее F_1.

Соответственно типам целей, включенных в план, можно говорить о тактических или стратегических относительно заданной позиции планах.

Отметим, что последовательная запись целей в плане не предполагает жесткой последовательности их осуществления. Управления могут быть подобраны таким образом, чтобы способствовать одновременному выполнению более одной цели плана.

2. Описания «мат черным», «пат», «фигура α захвачена», «белые владеют центром» являются примерами целей, причем первые два из них—г.ц., а остальные—л.ц.

Цели: дать мат, атаковать фланг (правый или левый), атаковать короля в центре и др., как правило, относятся к стратегическим, в то время как цели: вскрыть линию x, захватить открытую линию x, продвинуть пешки, произвести двойной удар и др.— к тактическим.

В зависимости от контекста данная цель F может иметь разный смысл, в частности, смысл «проверить F» или «создать F».

В первом случае предполагается заданным некий индивид a, для которого необходимо вычислить истинность F, либо предполагается, что существует другой индивид b связанный с a, и требуется при известном a оценить правдоподобие истинности F на b.

«Создать F» понимается как требование построить стратегию, для которой F обеспечено, т. е. для нее выполнено некоторое описание не хуже F относительно отношения выигрышности θ_1.

В естественных шахматных текстах встречается ряд выражений, которые можно интерпретировать в смысле «создать F». Например:

1) дать мат: создать стратегию, все концевые позиции которой матовые;

2) захватить фигуру α: создать стратегию, при которой противник теряет по меньшей мере α;

3) овладеть центром; создать стратегию, при которой обеспечено владение центром;

4) атаковать короля: создать стратегию, при которой обеспечена атака короля;

5) защитить короля: создать стратегию, при которой обеспечено по меньшей мере выполнение описания «король защищен» и др.

Выражение „разрушить α“ интерпретируется нами как „создать не α“, где α задается конкретным описанием и „не α“ понимается как невыполнение α.

Выражение „усилить α“ понимается как „создать β“, где β не хуже α относительно θ_1, а „ослабить α“ как „создать γ“ и γ не лучше α.

Отметим, что в работе [15] рассматриваются цели: <захватить фигуру *x*>, или <создать блокировку поля 4>, а в[161]—цели: <захватить фигуру *x*>, <захватить пешку *x*>, <создать атаку короля>, <создать двойную атаку>. Указанные цели в [161] рассматриваются как основные. Для их достижения генерируются начальные планы из фиксированного списка действий: ход, модификация (передвижение своей или чужой фигуры на произвольное или конкретное поле), проверка соответствия результата действия ожидаемому, ограниченный анализ (поиск комбинаций малой глубины). Результирующий план имеет вид последовательности действий: взять коня, передвинуть ладью и т. п.

Представляется, что планы, в форме последовательностей действий и рассматриваемые нами как последовательности описаний, в определенной мере равносильны, поскольку можно ввести соответствие между позициями, распознаваемыми описаниями плана в нашем смысле, и действиями, в результате которых эти позиции порождаются, в планах в смысле [161].

На примере партии (Тайманов—Аронин; староиндийская защита; классический вариант; 1952, [144]) рассмотрим процесс реализации конкретного стратегического плана через последовательность порожденных им же микропланов.

Позиция, которая возникла после ходов: 1. *d2d4 Kg8f6*; 2. *c2c4 g7g6*; 3. *Kb1c3 Cf8g7*; 4. *e2e4 d7d6*, 5. *Kg1f3* 0—0; 6. *Cf1 e2 e7e5*, является типичной для данного дебюта.

Стратегические планы белых и черных соответственно следующие:

Б: атаковать центр и ферзевый фланг; защитить короля на его фланге;

Ч: контратаковать королевский фланг; защитить ферзевый фланг.

Указанные планы выдвигаются в полученной позиции почти всегда, однако их разложение на микропланы, последовательность планов и конкретная реализация происходят по-разному.

При этом типичные списки тактических целей белых и черных соответственно следующие:

Б: защитить короля на его фланге; мобилизовать силы на ферзевом фланге; атаковать центр и ферзевый фланг путем вскрытия линий при пешечном продвижении и (легко) тяжело-фигурной атаке;

Ч: продвинуть пешки; атаковать короля пешками; мобилизовать силы на королевском фланге; атаковать белого короля легкими фигурами; защитить ферзевый фланг.

В рассматриваемой партии указанные цели достигались следующим образом: 7. 0—0 *Kb8 c6*; 8. *d4 d5 Kc6 e7* [черные перебрасывают силы на королевский фланг]; 9. *Kf3 e1* [с целью защитить короля] *Kf6 d7* [подготовка пешечного наступления]; 10. *Cc1 e3* [с той же целью защиты короля] *f5* [начало пешечного наступления]; 11. *f3 h5*; 12. *Kd3 f4*; 13. *Cf2 g5*.

На 13-ом ходу белые достигли первой тактической цели—защитили короля, а черные продолжают пешечное наступление.

14. *c*5 *Kf*6, 15. *Лc*1 *g*4.

Белые начали мобилизовать силы на ферзевом фланге, а черные одновременно с пешечным наступлением мобилизуют легкие фигуры. 16. Ф*b*3 *Ch*6, 17. *cd cd*, 18. *K*:*e*5 *g*3, 19. *Ce*1 *de*.

Белые мобилизовали силы, вскрыли линию *d* и наступают в центре, в то время как черные защищаются: 20. *d*6 *Kph*8, 21. *de* Ф:*e*7, 22. *Kb*5 *Ce*6, 23. *Cb*4 . . . и т. д.

§ 4. Образы и смысл ситуаций. Смысл описаний

1.1. В нашем представлении образы ситуаций, в частности шахматных позиций, должны состоять только из тех необходимых характеристик ситуаций, которые в совокупности позволяют распознать каждую ситуацию с определенной возможностью достижения некоторых заранее указанных целей. Точнее, произвольную $\langle F, l\rangle$-цель E назовем $\langle F,l\rangle$-*образом позиций,* если описание E является тупиковым, т. е. никакое подмножество дизъюнктов к.н.ф. E или частей этих дизъюнктов не является $\langle F, l\rangle$-целью.

Тем самым $\langle F, l\rangle$-образ понимается нами, как описание позиций без лишних компонент в к.н.ф. и в то же время обладающих свойством быть целью*. При этом данное понятие тупиковости описания не представляется незыблемым. Вместо него можно рассматривать тупиковые к.н.ф. по [28].

Данное выше определение $\langle F, l\rangle$-образов позиций одновременно является гипотезой о природе шахматных понятий, или образов, утверждающей, что каждый образ есть цель в «улучшеном» представлении.

Гипотеза хорошо согласуется с результатами анализа проведенных нами на материале более 200 известных шахматных понятий. По существу все они, исключая наиболее простые, типа фигура, клетка, доска и т. п., содержательно могли рассматриваться и как некоторые $\langle F,l\rangle$-цели. Полученный факт представляется весьма интересным, поскольку позволяет взглянуть на проблемы синтеза образов с позиций, отличных от традиционных (см. § 7).

Примером образов позиций являются шахматные *диаграммы*. Вот как они описаны в [1, стр. 65]: «Сейчас мы займемся разбором схем атаки, нацеленной на позицию рокировки. На диаграммах вы не увидите белого короля, не увидите каких-либо фигур, не принимающих участия в атаке. Это и есть диаграммы—схемы. Обозначены лишь фигуры, наносящие заключительный удар, вынуждающие мат

* В распознавании образов, где различение ситуаций является самостоятельной проблемой, как правило, подчеркиваются различительные функции описаний, быть может с требованием их краткости или минимальности. Так, например, в известной работе [37] именно выделение указанной характеристики как главной послужило основой алгоритма автоматического построения словаря фрагментов изображений и их мест—составных элементов различительного описания.

королю. Освоив механизм действия атакующих фигур, вы сумеете позднее без труда отличить их, как старых друзей, в толчее любой реально сложившейся позиции».

Описания некоторых шахматных эндшпилей дают другие примеры конкретных записей $\langle F,l\rangle$-образов. К ним относятся, например, описания: «Кр и Л против $\overline{\text{К}}$р», «Кр и Ф против $\overline{\text{К}}$р», «Кр, С, К против $\overline{\text{К}}$р» и др. с некоторыми дополнительными ограничениями на соответствующие допустимые классы позиций. По существу именно это свойство эндшпилей отмечено в [64].

1.2. Если описание E есть $\langle F, l\rangle$-образ позиций, то E-класс позиций будем называть также $\langle E, F, l\rangle$*-классом.* $\langle F, l\rangle$*-образом позиции* P или $\langle P, F, l\rangle$*-образом* назовем произвольный $\langle F, l\rangle$-образ позиций, применимый к P.

В определение оптимального в множестве всех $\langle F, l\rangle$-образов $\langle F, l\rangle$-образа E^*, как следствие гипотезы 1, хотелось бы ввести три не всегда совместимых требования: максимальные мощность и частоту существования $\langle F, l\rangle$-стратегий для $\langle E^*, F, l\rangle$-класса позиций, при одновременно минимальном времени распознавания принадлежности позиций к этому классу.

Поскольку, вообще говоря, чем короче описание, тем больше мощность класса позиций, выделяемых им, и тем меньше время распознавания, нами выбрано следующее определение.

Оптимальным $\langle F, l\rangle$*-образом позиций* назовем тот из $\langle F,l\rangle$-образов E^* с максимальной частотой существования $\langle F, l\rangle$-стратегий, у которого при минимальной длине записи $\langle E^*,F,l\rangle$-класс достигает наибольшей мощности. Тем самым E^* выбирается последовательно по критериям наибольших достоверности, краткости записи и, наконец, мощности класса позиций. Представляется, что данное определение оптимального $\langle F,l\rangle$-образа идейно близко понятию инварианта в исчислении из [63] (см. также § 5.4) для случая, когда оно получено на основе допустимых правил с максимально возможными областью применения и легкостью обращения к ним.

1.3. Для заданного $\langle F, l\rangle$-образа позиций E произвольный алгоритм, вычисляющий $\langle E', F, l\rangle$-слияние стратегий такое, что E-класс содержится в E'-классе, назовем *алгоритмом, порожденным* $\langle F, l\rangle$*-образом* E, или $\langle E, F, l\rangle$*-алгоритмом.*

Эндшпильные стратегии дают пример $\langle E, F, l\rangle$-алгоритмов. В частности, если E есть $\langle F, l\rangle$-образ „Кр и Л против $\overline{\text{К}}$р“, то $\langle E,F,l\rangle$-алгоритм описывает способ достижения мата черным из произвольной позиции с указанным составом фигур. (В действительности, указанный алгоритм включает также описание позиций, в которых выигрыш недостижим).

При использовании алгоритмов, порожденных некоторым $\langle F, l\rangle$-образом E, возникает необходимость выбора тех из них, которые π- или σ- оптимальны при поиске управлений для заданной позиции E-класса и при этом требуют возможно меньшего объема памяти для

своего хранения. В дальнейшем изложении вышеуказанные условия для алгоритмов, порожденных $\langle F,l \rangle$-образами специально не оговариваются, однако, предполагаются.

2. Интересно сопоставление понятий, связанных с содержанием слов и рассматриваемых в [45], с введенными нами.

Назывные слова в указанной работе понимаются как средство выделения и фиксации предметов, их свойств и отношений. К их основным свойствам относятся надситуативность, не эгоцентричность, объективность, семантическая устойчивость и константность.

В нашей формализации назывным словам можно сопоставить описания индивидов, а точнее цели.

Формальным понятием в [45] называется минимум наиболее общих и в то же время характерных отличительных признаков, которые необходимы для выделения и распознавания предмета. Содержательное же понятие охватывает все другие свойства предмета, его связи с другими.

Совокупности формальных и содержательных понятий образуют толковый и энциклопедический словари соответственно. «В уме человека, кладовой его памяти, понятия хранятся в двояком виде: как содержательные понятия, охватывающие всю сумму знаний человека о данном предмете, и как формальные дубликаты, тесно связанные со значением слов. Содержательные понятия хранятся в «свернутом виде», и без нужды мы не обращаемся к ним. Ни к чему ворочать целыми глыбами и при каждом упоминании о предмете мобилизовывать весь наш запас сведений о нем. При обычных условиях достаточно оперировать словом как носителем формального понятия, не загромождая мысль излишними деталями», [45, стр. 23].

Представляется, что «образы ситуаций» соответствуют формальным понятиям, в то время как «образы ситуаций вместе с их полным смыслом» (см. ниже)—содержательным.

Можно усмотреть также определенную аналогию между генезисом понятий по [45] и гипотезой о порождении целей, приведенной в § 3. Согласно [45, стр. 21], «Лексика распадается на ряд пластов, из которых самый основной и самый элементарный пласт образует абстракции, основанные на обобщении чувственных признаков и усваиваемые нами с детства путем «наглядного определения». В дальнейшем новые понятия определяются через указание ближайшего рода, а потом—специфических отличительных признаков».

3.1. Вопросы, связанные с уточнением понятий «смысл ситуаций» и «смысл описаний», в теории оптимального управления и информатике относятся к наиболее трудным. Они известны в рамках проблемы «текст—смысл—текст» (хотя правильнее было бы говорить о проблеме «ситуация—текст—смысл—текст—ситуация») и возникают, в частности, при извлечении из тезауруса данных, осмысленных (полезных) в заданной ситуации, при преобразовании описаний, сохраняющих их смысл (например, при переводе текстов с одного языка на другой), при извлечении и фиксации смысла описаний (например, при

автоматическим индексировании), при приеме и передаче смысла описаний в диалоге и др. Термин «смысл» используется также в выражениях: «вывод осмысленных ситуаций из заданной» или «отсечение бессмысленных ситуаций», «принятие осмысленных решений», и др.

Ниже предлагается одно из возможных уточнений понятий «смысл ситуаций и описаний».

3.2. Как было отмечено в § 3, понятия «описание целевых ситуаций», или «цели», и «смысл ситуаций» тесно связаны друг с другом. Если цели, в частности, образы позиций, распознают ситуации, связанные с ранее выявленными целевыми ситуациями проблемы управления, то смысл ситуаций показывает на конкретную форму этой связи.

Для произвольных $\langle F, l\rangle$-цели E и позиции P из E-класса l-*устойчивым относительно* F *частичным смыслом* P, или $\langle F, l\rangle$-*смыслом* P, назовем произвольную $\langle P, F, l\rangle$-стратегию.

Полным смыслом позиции P назовем множество всех различных $\langle F, l\rangle$-смыслов P.

Можно ввести частичное упорядочение на множестве всех $\langle F,l\rangle$-смыслов заданной позиции P, с помощью которого выделить основной или абсолютный смысл этой позиции. В частности, упорядочение может быть построено на основе отношения выигрышности θ_1 и значений параметров l. Ясно, что в этом случае абсолютный смысл каждой позиции будет максимален лишь в рамках фиксированного θ_1.

Представляется, что на вопрос «о причинах хода c_p в позиции P» должен быть указан один из $\langle F,l\rangle$-смыслов P с первым ходом c_p. При этом после указания некоторого $\langle F, l\rangle$-смысла можно сказать, что «ход c_p стал понятен».

Отметим, что существуют различные уровни понимания c_p. Так, например, можно выделить цель F, правдоподобие которой после c_p возросло в наибольшей степени, и частичным объяснением c_p считать описание той части подграфа «часть-целое» для F, которое приняло значение «истинно» только после хода c_p. Такое объяснение в определенном смысле происходит в языке высокого уровня.

4.1. Выше были указаны ряд направлений исследований, связанных с необходимостью уточнения понятия «смысл описания ситуаций». Рассмотрим некоторые особенности одного из таких направлений— диалога между человеком и системой управления, или двумя такими системами.

Предполагается, что диалог происходит посредством приема-выдачи описаний индивидов и направлен к взаимному усилению его участников, получению знаний от какого-то из них другим, информированию об их внутреннем состоянии и др. Эффективная организация диалога требует уточнения представления о том, что его участники «понимают друг друга»; последнее в свою очередь тесно связано с понятием «смысл описаний».

Смысл описаний, в частности позиций, можно уточнить через смысл позиций следующим образом.

Смыслом произвольного описания E назовем каждый из $\langle F,l\rangle$-смыслов каждой из позиций E-класса, т. е. произвольный элемент объединения полных смыслов позиций E-класса.

Понять описание позиций E означает располагать каким-либо смыслом позиций из E-класса. Под *полным смыслом описания* позиций E естественно понимать совокупность всех смыслов позиций E-класса.

Можно считать, что одна система поняла сообщение—описание E, второй, если этому сообщению ею поставлен в соответствие тот же или близкий смысл из множества тех $\langle F, l\rangle$-смыслов, которые зафиксировала первая система при генерации E. О том, что сообщение первой системы стало понятно второй, она может, в частности, узнать из новых сообщений второй системы, связанных с ситуациями E-класса, и их тем же $\langle F,l\rangle$-смыслом. Заметим что если один из участников диалога человек, то целесообразно проводить его на естественном языке. Это обусловлено не только вопросами удобства для человека, но также тем, что формирование однозначно понимаемых вопросов нетривиально, и потому, как правило, требуется их последовательное уточнение в достаточно богатом языке. Можно сказать, что необходимость в использовании для диалога естественного языка вытекает из сложившейся формы коммуникации для человека и трудности формирования точных вопросов в ограниченных языках.

4.2. Другой известной проблемой, требующей уточнения понятия «смысл описаний», является проблема автоматического перевода с одного языка на другой. В работе [65] она связывается с установлением правил, позволяющих алгоритмически проверить соответствия между всеми текстами (описаниями) с одним и тем же смыслом и этим смыслом (в некотором заданном языке). При решении указанной подпроблемы используется гипотеза о том, что всевозможные смыслы текстов естественных языков можно разложить на элементарные единицы—семы, число которых сравнительно мало (около $2 \cdot 10^3$), а состав их в языках одинакового уровня развития примерно совпадает. При этом и способы построения сложных смыслов из сем стандартны и ограничены. Данная гипотеза индуцирует один из путей решения проблемы автоматического перевода, суть которой в том, что выявляются эквивалентности между семами разных языков, а в каждом из них строятся системы правил для перехода от текстов к их семантическим представлениям (СемП).

Трудность исследований возможности построения такой системы правил объясняется в значительной степени трудностью контроля однозначности перехода от текстов с одним и тем же смыслом к их СемП.

В настоящее время предполагается, что каждый исследователь должен производить этот переход индивидуально, исходя из собственных «внутренних» представлений о связях между текстами и их СемП. Принятие такого субъективного подхода к построению СемП вынужденно и объясняется отсутствием в каком-либо явном виде описаний смыслов исследуемых текстов. Недостатки этого подхода в лингвис-

тике осознаются достаточно ясно, хотя эффективных путей их преодоления не указывается, полагая, что они связаны с внелингвистическими исследованиями.

Представляется, что исследования проблемы «смысл—текст» на проблемах-посредниках, в частности, как у нас—на ПОУ^{ш}, в определенной степени позволят преодолеть указанный субъективизм. Сформулировав в рамках ПОУ^{ш} точное определение смысла описаний и указав его для каждого из этих описаний, мы получаем возможность контроля правил преобразований шахматных текстов в их СемП. Указанный контроль не связан с личностью исследователя, многократно повторяем и потому объективен. Исходя из принципов построения таких правил, выявленных в ПОУ^{ш}, в дальнейшем можно искать пути их обобщения.

Заметим, что в ПОУ^{ш} описания в языке $L(\mathcal{A}^*)$ по существу являются СемП, как они определены в работах по моделям «смысл—текст».

§ 5. Отношения „цель-подцель“, „часть-подчасть“, „мотив-цель“. Функция правдоподобия целей

1. Предполагается, что на множестве целей определено частичное упорядочение „*цель-подцель*“, указывающее на то, какие цели являются необходимыми этапами при достижении заданной, что в значительной мере отражает очередность генезиса этих целей. Это отношение будем обозначать через θ_2, а сам факт наличия связи „цель-подцель“ между вершинами a и b будем записывать в форме $a\theta_2 b$. Предполагается также, что отношение θ_2 может быть описано графом и/или [101]. Вершинами графа являются цели, соединенные с другими целями операторами „&“ или „$\vee$“.

Использование отношения θ_2 при формировании планов основано на следующей гипотезе: если цель g_1 есть подцель g_2, то сложность достижения g_2 после достижения g_1, вообще говоря, уменьшается; в частности, сложность достижения цели может пониматься как глубина синтезируемой стратегии. Отношение θ_2 указывает на возможные и часто встречаемые связи этого типа между целями. Однако роль θ_2 при синтезе планов существенно зависит от анализируемой позиции и конкретной структуры алгоритма синтеза.

Как правило, отношение θ_2 определяет некоторую систему тактических целей, которые являются подцелями некоторой стратегической цели.

Заметим, что имеется определенная связь между θ_2 и отношением выигрышности θ_1. Представляется, что весьма часто подцель F заданной цели E менее выигрышна относительно θ_2, чем E. Однако E может быть более выигрышной, чем F, но вопрос о том, является ли F подцелью E, может остаться открытым.

2. Каждой формуле-цели F поставим в соответствие ее функциональную схему F^*. Вершинами F^* являются атомарные формулы языка $L(\mathcal{A}^*)$ и операторы &, $\vee$, $\neg$. Корень F^* будем отмечать символом F.

Множество подформул произвольной цели F будем называть *частями* F, а θ_3—графом *„часть-целое“*.

Представляет интерес исследование взаимосвязи элементов графов θ_2 и θ_3. Оно может иметь, в частности, вид: если F_1 часть F_2, то F_2 — цель более дальняя, чем F_1, или F_1 есть подцель F_2.

3. При формировании целей для последующего синтеза стратегий шахматисты пользуются так называемыми *мотивами*—описаниями, при выполнении которых есть основания предполагать существование стратегий с важными для них свойствами. Например, шахматисты считают, что если в позиции P положение короля стеснено, то возможна комбинация, связанная с матом. Здесь мотив — положение короля стеснено, а целевое описание — матовая комбинация.

Мотивами могут быть необходимые компоненты рассматриваемой цели, выполненные в той или иной мере. Отношение *„мотив-цель“* будем обозначать через θ_4. В соответствующем графе связи целей с их мотивами описываются модификацией графа и/или, который может быть и несвязным. Вершинами графа являются либо мотивы, либо элементы &, $\vee$.

К вершине — цели может быть направлена только одна стрелка, соединяющая цель либо с одним мотивом, либо с элементами &, $\vee$. К входам элементов &, $\vee$ подходят выходы либо других элементов &, $\vee$, либо мотивы. Каждый из элементов &, $\vee$ определяет некоторую формулу, описывающую характер связи мотивов друг с другом, а также с целями.

4. Использование описаний в алгоритмах управления связано с подпрограммами, вычисляющими эти описания.

Будем говорить, что *алгоритм A вычисляет формулу* F_n, определенную на универсуме $\mathcal{A}$, если для произвольной n-ки индивидов $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ из области определения F_n, $A(a_1, \ldots, a_n)$ есть значение истинности F_n на $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Алгоритм A вычисляет функцию f_n, определенную на $\mathcal{A}$, если $A(a_1, \ldots, a_n)$ есть значение f_n на $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Дескриптором формулы F (*функции* f), заданном на универсуме $\mathcal{A}$, назовем произвольный алгоритм, вычисляющий F (соответственно f). Предполагается, что дескрипторы заранее построены для некоторого списка формул и функций (в частности, всех атомарных формул), и являются основой алгоритмов построения описаний (вообще говоря, как это уже обсуждалось в § 1, первичны дескрипторы формул и функций, а сами формулы и функции являются одним из способов их представления).

Предполагается, что на множестве дескрипторов определены следующие графы.

Граф θ_1, индуцированный отношением выигрышности.

Графы, полученные из графов „цель-подцель“, „часть-целое“, „мотив-цель“ посредством нанесения специальной метки на вершины, которые являются корневыми для реализованных дескрипторами подформул.

Граф *реализуемости* θ_5, указывающий на сравнительную сложность вычисления дискрипторов и порожденный некоторой конкретной мерой этой сложности.

Граф θ_6—*„программа-подпрограмма“*. Дескрипторы D_1 и D_2 находятся в этом отношении, или $\langle D_1, D_2 \rangle \in \theta_6$, если при вычислении D_2 на некотором индивиде из $\mathcal{A}$ происходит хотя бы одно обращение к D_1. Понятие „алгоритм A_1 обращается к алгоритму A_2“ здесь не формализуется, но используется в том же смысле как „программа A_1' обращается к подпрограмме A_2'“, где A_i' реализует A_i, $i=1, 2$, и записана в одном из языков программирования. При необходимости точных рассмотрений можно считать граф θ_6 заданным заранее.

5.1. При поиске оптимальных в заданной позиции P стратегий область поиска может быть существенно сужена, если заранее известно, какие цели в P достижимы и с какой достоверностью. Для оценки гипотез этого типа введем двухместную функцию, которая по каждой паре—позиции P и цели F, выдает число $z(F, P)$, $0 \leqslant z(F, P) \leqslant 1$, —*релевантность P к F* или *правдоподобие цели F в позиции P*. Эта функция призвана отразить причинно-следственные связи между выполнением определенных элементов F и возможностью достижения F посредством некоторой P-стратегии.

Конкретная функция отражает наши знания о характере этих связей и использует взвешенные графы θ_3^*— „часть-целое“ и θ_4^*—„мотив-цель“, поскольку связи между целями, их частями и мотивами могут иметь разную степень достоверности. Указанные графы определяются следующим образом.

Пусть x—произвольная вершина графа θ_l, $l=2, 3, 4$, $y_1, \ldots, y_n$—все вершины, смежные с x. Предполагается, что если x есть элемент „&“, то каждому ребру, идущему от y_i к x, в графе θ_l^* присвоен вес v_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Эти веса указывают на относительную важность вершины y_i при вычислении выполнимости x и заранее заданы для всех элементов типа „&“ графа θ_l^*.

При вычислении правдоподобия заданной цели F нам потребуется выделять подформулы, непосредственно связанные с F, т. е. принадлежащие окрестности I порядка или покрытию соответствующей F вершины на графе и/или. Последние понятия уточняются следующим образом.

Окрестность I порядка $R^I(x)$ вершины x для графа θ_l, $l=1, \ldots, 6$ определяется как множество вершин θ_l, смежных с x и направленных к x.

Напомним, что x может соответствовать не только цели или мотиву, но и связкам &, $\vee$.

Покрытием I порядка $\bar{R}^l(x)$ вершины x относительно θ_l, $l=1, \ldots, 6$ назовем множество всех тех вершин θ_l, в окрестностях I порядка которых находится x. Окрестности и покрытия n-го порядка, $n>1$, определяются естественным образом.

5.2. В нашем рассмотрении правдоподобие $z^3(F, P)$ цели $\langle F, l\rangle$ в позиции P на основе θ_3^* определяется следующим образом.

Во взвешенном графе θ_3^* выделяется минимальный подграф G, содержащий все вершины, связанные ориентированными маршрутами с вершиной, соответствующей формуле F.

Тогда, если $R^3(F)=\varnothing$, то принимается;

$$z^3(F, P)=\begin{cases} 1, \text{ если } F \text{ истинно в } P, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $R^3(F)=\{y_1, \ldots, y_n\}\neq\varnothing$ и $z^3(y_i, P)$ для всех $i=1, \ldots, n$ вычислены.

Тогда возможны следующие случаи:

1) если F приписан элементу &, то

$$z^3(F, P)=\sum_{i=1}^{n} v_i z^3(y_i, P);$$

2) если F приписан элементу $\vee$, то

$$z^3(F, P)=\max_{i=1,\ldots,n} z^3(y_i, P);$$

3) если F приписан элементу $\neg$, то $i=1$ и $z^3(F, P)=1-z^3(y_1, P)$.

Легко видеть, что всегда $0\leqslant z^3(F, P)\leqslant 1$.

Правдоподобие $z^4(F, P)$ на основе графа θ_4^* определяется аналогичным образом. При этом, если F соединена ребром с мотивом y, то $z^4(F, P)$ равна 1 или 0, в зависимости от истинности y на P. Если же y есть формула, указывающая на характер связей определенных мотивов с F, то $z^4(F, P)=z^4(y, P)$.

В реализованном нами алгоритме вычисления правдоподобия целей (см. § 3.6) произведено совмещение графов θ_3^* и θ_4^*, при котором к целям графа θ_3 добавлены соответствующие мотивы из графа θ_4, после чего произведен пересчет весов.

§ 6. Закономерности

1. Пусть ψ—фиксированный алгоритм построения описаний, $F\geqslant E$ означает, что описание F „сильнее“ описания E относительно отношения выигрышности θ_1, $\mathscr{B}'$—множество алгоритмов, вычисляющих произвольные слияния стратегий. Пусть также $z(F, P)$—функция правдоподобия цели F в позиции P.

Рассмотрим язык L^0, полученный расширением языка $L(\mathcal{A}^*)$ посредством введения новых предикатных ($\geqslant$) и функциональных (ψ, z) символов, а также новых имен индивидов — имен для множества формул (к. н. ф.) языка $L(\mathcal{A}^*)$ и слияний стратегий. Поскольку число элементов этих множеств конечно, то, также как и в $L(\mathcal{A}^*)$, формулы L^0 можно рассматривать в форме к. н. ф., число которых будет конечным. При этом выражение $x \in \mathcal{B}'$ считается эквивалентным формуле $x = H_1 \vee x = H_2 \vee \ldots \vee x = H_r$, где $H_1, \ldots, H_r$ — всевозможные слияния стратегий; равенство $x = H_i$ понимается как утверждение о вычислении алгоритмом x слияния стратегий H_i.

Структуру, полученную из $\mathcal{A}^*$ вышеуказанным расширением, обозначим через $\mathcal{A}^0$.

При определении закономерностей будут использованы следующие обозначения: $F_1, \ldots, F_r$ ($r \geqslant 2$) и A_1 — произвольные фиксированные описания и алгоритм из $\mathcal{B}'$ соответственно; x, y и A, B — переменные позиций и алгоритмов из $\mathcal{B}'$ соответственно; $T_m = \{x \mid \&_{j=1}^{m}(z(x, F_{i_j}) \geqslant \rho_{i_j}\}$, $1 < m \leqslant r$; I_r — заданное множество позиций таких, что в каждой из них x известен первый ход c_x некоторой $\langle x, F' \rangle$-стратегии, где $F' \in \{F_1, \ldots, F_r\}$; f_1 и f_2 — функции, преобразующие позиции в множества позиций и ходы (пары позиций) в множества ходов соответственно.

Пусть также $\mathcal{P}(A)$ и $F(A)$ — первый и второй параметры слияния стратегий H, соответствующего алгоритму A, а $\psi(A)$ понимается как $\psi(H)$.

Закономерностью в ПОУ^{ш} назовем произвольный текст вида $u_i \Rightarrow v_i$, где u_i и v_i, при $i = 0, 1, \ldots, 7$, формулы языка L^0 одного из нижеследующих типов:

0. $u_0 = x \in \mathcal{P}(A_1)$, $v_0 = \psi(A_1(x)) \geqslant F(A_1)$, где $A_1(x)$ — x-стратегия, индуцируемая A_1 из позиции x;

1. $u_1 = F_1(x)$, $v_1 = \exists A(A \in \mathcal{B}' \& x \in \mathcal{P}(A) \& F(A) \geqslant F_r)$;

2. $u_2 = x \in T_{r-1}$, $v_2 = v_1$;

3. $u_3 = F_1(x) \& \psi(x) \setminus F_1(x) = \psi(y)$,
$v_3 = \forall B \exists A(A, B \in \mathcal{B}' \& x \in \mathcal{P}(A) \& y \in \mathcal{P}(B) \to F(A) \geqslant F(B))$;

4. $u_4 = F_1(x) \& F_2(y) \& \psi(x) \setminus F_1(x) = \psi(y) \setminus F_2(y)$, $v_4 = v_3$;

5. $u_5 = F_1(A) \& \psi(A) \setminus F_1(A) = \psi(B)$, $v_5 = F(A) \geqslant F(B)$;

6. $u_6 = x \in T_m$, $v_6 = \exists y(y \in T_m \cap I_r \& x \in f_1(y) \& c_x \in f_2(c_y))$, где c_y — ход в y в соответствии с определением I_r, а c_x — ход в x, вычисленный в x на основе c_y;

7. $u_7 = u_2$, $v_7 = (u_{i_1} \Rightarrow v_{i_1}) \vee \ldots \vee (u_{i_p} \Rightarrow v_{i_p})$, т. е. для x следует проверить возможность применения одной из закономерностей с номерами $i_1, \ldots, i_p$.

Формулу слева от стрелки „$\Rightarrow$“ назовем *распознавателем* закономерности, а формулу справа—*описанием следствия*.

Стрелка прочитывается словом „если“. В частности, закономерности I типа читаются так: для каждой позиции x, если F_1—описание, применимое к x, то существует слияние стратегий, применимое к x и такое, что для него справедливо F_r.

Закономерности типов 0—7 получены на основе известных нам шахматных правил, точных и эвристических, и при обнаружении новых список их может быть расширен.

Распознаватели в закономерностях типов 0—4, 6, 7 являются описаниями позиций, а в типе 5—описанием слияний стратегий. Соответственно должны определяться ситуации обращения к ним: к первой группе—при выборе релевантных к заданной позиции закономерностей, а ко второй—при анализе эффективности закономерностей, уже извлеченных после первого этапа.

Из определения закономерностей видно, что основные типы рассмотренных нами <знаний> в том или ином виде являются их компонентами. В этом смысле закономерности являются концентрированной, суммарной формой <знаний>.

Отметим также, что в данном выше определении, закономерности не являются элементами языка L^0. Представляет интерес в дальнейшем рассмотреть такое расширение L^0, в котором они являлись бы формулами вновь полученного языка L' и одновременно были бы самоприменимы, т. е. допускали бы возможность своего использования в распознавателях или следствиях других закономерностей. Указанное расширение, видимо, можно получить последовательным добавлением к предикатному базису полученного ранее языка новых предикатов $x \Rightarrow y$, определенных на парах формул этого языка.

2. Каждой закономерности припишем число—*достоверность* закономерности, которое вычисляется следующим образом.

Для произвольной формулы F в L^0 *показателем истинности* F при структуре $\mathcal{A}^0$ назовем число всех различных частных случаев F, получаемых из F и истинных в $\mathcal{A}^0$.

Оператор η, определенный на множестве всех закономерностей, назовем *оператором достоверности*, если для произвольной закономерности $\mathcal{R}$ с распознавателем D_1 и описанием следствия D_2 $\eta(\mathcal{R})$ равно отношению показателя истинности $D_1 \& D_2$ в $\mathcal{A}^0$ к показателю истинности D_1.

Ясно, что $0 \leqslant \eta(\mathcal{R}) \leqslant 1$. Закономерность $\mathcal{R}$ назовем *детерминированной, если* $\eta(\mathcal{R})=1$, *ложной*, если $\eta(\mathcal{R})=0$, и *недетерминированной* в остальных случаях.

Если точное значение $\eta(\mathcal{R})$ неизвестно, то $\mathcal{R}$ будем называть *эвристикой*. Для эвристик часто известны некоторые гипотезы об $\eta(\mathcal{R})$. Конкретные формы этих гипотез различны. Например, это могут быть оценки сверху или снизу. Соответственно возникает вопрос о вычислении правдоподобия этих гипотез и методах их приближения к истинному значению.

3. Приведем примеры описанных в литературе шахматных закономерностей каждого типа. Первый индекс в номере примера будет указывать на тип его формального аналога.

0. Закономерности типа 0 в литературе специально не формулируются, ввиду их очевидности. Они означают, что применение некоторого $\langle \mathcal{P}, F, l \rangle$-слияния стратегий к позиции из $\mathcal{P}$ обеспечивает достижение цели не хуже чем F относительно θ_1. При этом закономерности типа 0 можно считать разновидностью закономерностей типа 1 при актуально известном алгоритме A из $\mathcal{B}'$.

1.1. Король и ферзь матуют одинокого короля не более чем за 9 ходов.

1.2. Король и ладья всегда матуют одинокого короля противника не более чем за 16 ходов.

1.3. Король и два слона всегда матуют одинокого короля противника не более чем за 22 хода.

1.4. Король, слон и конь всегда матуют короля противника не более чем за 34 хода.

1.5. Король и пешка против одинокого короля выигрывают, если король находится перед своей пешкой, и ничья—если он сбоку или сзади своей пешки.

1.6. Король настигает проходную вражескую пешку, если своим очередным ходом входит в квадрат этой пешки («правило квадрата»).

3.7. Как правило, хорошо занимать пешками и фигурами центральные поля.

3.8. Необходимо стараться захватить как можно большее пространство (т. е. большую часть доски).

3.9. Как правило, хорошо занимать открытую вертикаль тяжелой фигурой (особенно ладьей).

3.10. Как правило, хорошо проникать ладьей в тыл противника—на 7-ю (2-ю) горизонталь.

3.11. Как правило, сдвоенные пешки—это слабость в позиции.

3.12. Как правило, изолированная пешка—это большая слабость в позиции.

3.13. Без особой необходимости не надо двигать пешки на том фланге, где вас атакуют.

4.14. Как правило, 2 слона немного сильнее 2-х коней.

4.15. Как правило, в ближнем бою конь сильнее слона, а в дальнем—слон сильнее коня.

4.16. Как правило, 3 легкие фигуры немного сильнее ферзя.

4.17. Как правило, 2 ладьи примерно равны ферзю.

5.18. В дебюте главное—это планомерное быстрое развитие фигур.

5.19. В дебюте нельзя дважды ходить одной фигурой без надобности.

5.20. Как правило, плохо играть в дебюте ферзем.

5.21. Лучшая защита почти всегда связана с подключением к опасному участку новых сил.

5.22. Как правило, для успеха в атаке необходимо бросить в нее все возможные силы.

5.23. Как правило, лучшим ответом на фланговую атаку является контратака в центре.

5.24. В эндшпиле лучшее положение короля—в центре доски.

С закономерностями типа 2 шахматист сталкивается при выборе целей в анализируемой позиции, и потому с каждым известным ему набором целей можно связать соответствующую закономерность.

Закономерности типа 6 в определенном смысле близки к типу 0. Отличие их в том, что в них вместо полной стратегии и ожидаемого выигрыша указывается некоторое заранее выбранное множество позиций I_r с известными в них эффективными ходами, а также способы эквивалентных (с точки зрения смыслов позиций) преобразований этих позиций и ходов в них. Указанные закономерности будут более подробно рассмотрены в § 3.6.

В закономерностях типа 7 по существу выдвигается некоторая гипотеза о распознавателях, которые могут быть выполнены для позиций со свойством u_2.

4. Приведем примеры интерпретации введенных нами закономерностей через перечисленные выше.

(1.1) x—позиция, в которой три фигуры: Kp, Ф, $\overline{Kp}$ (F_1); F_r—свойство стратегии A обеспечивать мат при глубине 9.

(3.7). Если x, y—позиции такие, что в x пешки (фигуры) занимают центральные поля (F_1), а в y—нет, а описания $\psi(x)\setminus F_1(x)$ и $\psi(y)$ равносильны, то x не менее выигрышная относительно θ_1 чем y.

(4.14). Если x, y—позиции такие, что $\psi(x)\setminus F_1(y)$ равносильно $\psi(x)\setminus F_2(y)$, $F_1(x)$ и $F_2(y)$—выполнены, где F_1 и F_2—свойства позиций иметь двух слонов либо коней соответственно, то x более выигрышная чем y.

(5.18). Если A, B — дебютные стратегии такие, что в A обеспечено планомерное и быстрое развитие фигур (F_1), а в B — нет, а в остальном цели, обеспечиваемые A и B, равносильны относительно θ_1, то A не менее выигрышная относительно θ_1 чем B.

Отметим, что наряду с вышеуказанными возможны и другие интерпретации рассмотренных закономерностей. Список же последних может пополняться, например из [151], что в свою очередь может потребовать расширения языка L^0. Возможны специальные изменения конструкций, используемых при формировании закономерностей. В частности, они, видимо, потребуются для алгоритма построения описаний ψ при формализации правила: если принять силу пешки за 1, то, как правило, силы ферзя, ладьи, слона и коня равны 9, 5, 3, 3 соответственно.

5. Как было отмечено в § 1.2, поиск вывода формул от n переменных ($ПВ_n$) можно представить как разновидность ПОУ. Типы знаний в $ПВ_n$ в этом случае получают соответствующую интерпретацию в $ПОУ^ш$. В частности, в [61, 64] справедливо отмечена аналогия между

допустимыми правилами в поиске вывода и знаниями в области эндшпильной теории. В нашем уточнении им соответствуют закономерности типов 0 и 1 с достоверностью, равной 1. Из других связей между $ПВ_n$ и $ПОУ^ш$, приведенных в [61, 64], отметим, что мера выводимости у нас уточняется через понятие «достоверность закономерности», а конкретные дебютные стратегии и комбинации являются разновидностями закономерностей типа 0 при соответствующем задании их достоверностей.

Мощность допустимого правила интерпретируется, в частности, как мощность множества позиций, к которым применим распознаватель рассматриваемой закономерности.

Отметим, что закономерности, выделяемые в [162], можно отнести к типу 0, в [146]—типу 2, в [143]—типу 6 (но при другом распознавателе).

Отметим также, что в индуктивном определении целей § 3, частота существования $<P,F,l>$-стратегий является значением оператора достоверности для закономерностей типа I. Следовательно, в соответствии со значениями этого оператора и степени известности этих значений можно говорить о (не)детерминированных, ложных или эвристических целях.

§ 7. Проблемы синтеза <знаний>

1.1. В § 4.4. были выделены 4 типа усилителей, каждый из которых основан на определенной совокупности средств, способных повлиять на эффективность работы алгоритмов управления. Для первого типа усилителей это совокупность подпрограмм заданных классов, для второго—множество связей основной схемы алгоритмов, для третьего и четвертого типов—конкретные списки записей и типы организации тезауруса соответственно.

Получение элементов каждого из этих множеств является самостоятельной нетривиальной проблемой. Некоторые из них были сформулированы нами ранее в § 3.4, в частности проблема поиска стратегий в графе игры ($ПСГ_0^ш$). В этом же параграфе будут поставлены ряд новых проблем синтеза записей, определенных в § 1—6 и в нашем предположении представляющих знания (в смысле § 3.4) о $ПОУ^ш$. Для краткости изложения о записях вышеуказанного типа будем говорить как о <знаниях>.

1.2. Для удобства дальнейшего анализа приведем список определенных нами типов <знаний> с указанием их разновидностей, а также, по возможности, их интерпретаций через типы знаний шахматистов.

А. Язык первого порядка L:

1. *функции:* цвет, число ударов на клетку, преобразования координат, сохраняющие заданные свойства, и др.

2. *логические операции:* или, и, не

3. *формулы:*
3.1. атомарные (x—фигура, x—клетка, x—диагональ и др.)
3.2. составные (дизъюнкты, к.н.ф.),
3.3. *описания:*
3.3.1. описания индивидов,
3.3.2. *описания классов индивидов:*
3.3.2.1. *цели:*
а) глобальные,
б) локальные,
в) тактические,
г) стратегические,
д) позиции стремления, типовые позиции.
е) $\langle F,l \rangle$ - *образы позиций:*
е.1. понятия: сдвоенная пешка, связка, двойной удар и др.
е.2. диаграммы,
е.3. описания типов эндшпилей,
3.3.2.2. мотивы,
3.3.2.3.типы дебютов.

Б. Последовательности описаний:
1. *планы:*
1.1. тактические,
1.2. стратегические,
1.3. микропланы.

В. Отношения упорядочения:
1. выигрышности (θ_1),
2. цель-подцель (θ_2),
3. часть-целое (θ_3),
4. мотив-цель (θ_4),
5. реализуемости (θ_5),
6. программа-подпрограмма (θ_6),
7. взвешенные графы (θ_i^*, $i=2, 3, 4$).

Г. $\langle P,F,l \rangle$ - стратегии, их элементы и объединения:
1. оптимальный ход в P,
2. форсированный вариант,
3. комбинация,
4. решение задачи,
5. эндшпильная стратегия,
6. решение этюда,
7. дебютная стратегия,
8. фрагмент партии,
9. результат анализа партии,
10. партия из «Информатора»,
11. ловушка,
12. $\langle \mathcal{P},F,l \rangle$-слияние стратегий,
13. алгоритм вычисления $\langle \mathcal{P},F,l \rangle$- слияния стратегий,
14. алгоритм, порожденный $\langle F,l \rangle$- образом позиций.

Д. Закономерности:

1. типов 0—7 (см. § 6),
2. детерминированные,
3. ложные,
4. недетерминированные,
5. эвристики.

1.3. Следует отметить, что каждая из формируемых ниже проблем синтеза <знаний> является самостоятельной оптимизационной проблемой. В то же время вопрос о том, является ли та или иная запись тезауруса знанием относительно заданного алгоритма управления, как уже отмечалось в § 4.4, зависит от многих факторов, в частности, от структур алгоритмов поиска стратегий, поиска в тезаурусе, координатора и др. Это означает, что, вообще говоря, проблемы синтеза знаний должны формироваться в контексте конкретных проблем управления и разрешающих их алгоритмов. Однако представляется, что можно выделить некоторые контекстно независимые требования позволяющие поставить автономные проблемы синтеза записей, обладающих многими предпосылками быть знаниями. Рассматриваемые ниже постановки проблем синтеза записей тех или иных типов являются попыткой постановки таких автономных проблем. Ясно, что с каждой такой постановкой должен быть обсужден вопрос о возможности использования решений указанных проблем в качестве знаний, или другими словами вопрос о том, в какой мере согласованы критерии оптимальности в проблемах синтеза <знаний> с критериями оптимальности исходной проблемы управления или ее подпроблем. Такое обсуждение будет проводится по мере постановки проблем.

1.4. Как видно из определений типов <знаний>, приведенных в предыдущих параграфах, одни из них используют в качестве исходных данных другие; например $\langle P,F,l\rangle$-стратегии, предполагают заданными отношение выигрышности и некоторый список целей. Вопрос о возможности такого «порочного круга» возникает также при постановке проблем синтеза <знаний> с требованием расширения списка <знаний> некоторого заданного типа. Поэтому необходимо специальное уяснение отсутствия замкнутых на себя определений, в частности, посредством указания очередности развертывания процесса синтезируемых <знаний> и их начальных представлений.

Нами принимается, что основным источником исходных <знаний> являются данные, приведенные в постановке самой проблемы управления. Так в ПОУ^{ш} исходные данные $\langle S, C, \mathcal{M}, D, Q\rangle$, где S, C, D, Q — множества позиций, управлений, возмущений и целевых позиций (матовых, ничейных) соответственно, а $\mathcal{M}$—частичное отображение $S\times C\times D$ в S (см. § 1.2), позволяют выделить следующие начальные <знания>.

Задание параметров ПОУ^{ш} $\langle S, C, \mathcal{M}, D, Q\rangle$ как минимальное условие предполагает указание определенных алгоритмов распознавания элементов соответствующих множеств. В частности, должны

быть указаны дескрипторы выделения позиций и их элементов (цвета, фигур и др.), допустимых ходов, матовых и ничейных позиций и др. Действительный список дескрипторов значительно шире, поскольку многие из вышеуказанных дескрипторов (например мат) достаточно сложны и потому задаются как системы более простых дескрипторов. Этот факт становится особенно явным при моделировании шахматной игры. Так в наших моделях дескриптор «мат» использует как подпрограммы, в частности, следующие: клетка, доска, фигуры типа x, линии (горизонтальные, вертикальные, диагонали), поля доступности короля, король под шахом, шахующая фигура (не) атакована (защищена) и др.

Используя вышеуказанные дескрипторы и связи между ними получаем ряд исходных данных при определении <знаний> и постановке проблем их синтеза. Так начальный список целей (СЦ^0) определяется дескрипторами целевых ситуаций ПОУ^ш (мат, пат), а также некоторыми из их подпрограмм (король под шахом, отсутствие свободных полей доступности короля, отсутствие атаки на шахующую фигуру, защиты шахующей фигуры и др.).

Одновременно указанные цели определяют начальные отношения „часть-подчасть" (θ_3^0), „цель-подцель" (θ_2^0) и „выигрышность" (θ_1^0).

Каждый раз после построения новых целей происходит расширение ранее известных списков целей и отношений.

Ясно, что наличие СЦ^0 и θ_1^0 уже делает определение $<P, F, l>$-стратегий корректным, что в свою очередь обеспечивает корректность определения целей. Эту же очередность естественно приписать и процессу синтеза <знаний>. А именно, на основе СЦ^0 и θ_1^0 синтезируются $<P,F,l>$-стратегии, что позволяет синтезировать новый список целей СЦ^1. Далее θ_1^0 расширяется на основе СЦ^1 и переходит в θ_1^1, после чего происходит синтез СЦ^2 и т. д.

2.1. *Синтез элементов языка.* Ограниченный язык первого порядка определяется своими функциональными и предикатными символами, связками «и», «или», «не» и формулами (атомарными и составными). Из этих элементов языка формулы следует считать основными, а остальные элементы вспомогательными, определяемыми конкретной формой перехода от дескрипторов, выделяющих части среды, к их представлению через символы языка (см. § 1). Поэтому проблемы синтеза элементов языка понимаются нами как проблемы расширения списка формул языка при некотором их известном базисе. А именно, ниже формулируются проблемы порождения новых описаний, точнее, целей и их разновидностей—образов ситуаций. Тем самым охватываются проблемы синтеза формул специальных типов, а также функций, как их разновидностей.

Связки «и», «или», «не» предполагаются априори известными вместе с исходными данными о ПОУ^ш, хотя вопрос об их порождении имеет самостоятельный интерес, исследуемый в настоящее время, в основном, в психологии [76].

Заметим, что в рассмотренных нами шахматных дескрипторах дескрипторы функций были связаны в основном с вычислением координат тех или иных индивидов, т. е. связаны с уточнением местоположения индивидов. Поэтому представляется, что вопрос их синтеза выходит за рамки ПОУ^{ш}, а сами они должны задаваться вместе с исходными данными ПОУ^{ш}.

Перейдем к непосредственной постановке проблем синтеза описаний.

2.2. В § 1.2. был рассмотрен ряд инициально пустых проблем формирования образов, представленных в форме ПРОI. Особенность этих проблем состоит в том, что синтез образов происходит по заданным описаниям индивидов и указаниям об их принадлежности к искомым образам, получаемым из некоторого внешнего относительно этих описаний источника—оракула.

В такой постановке проблемы формирования образов отсутствуют указания относительно объединяющего начала индивидов одного класса. В нашем представлении таким началом должен быть некоторый общий $\langle F,l\rangle$-смысл для каждого образа, объединяющий индивиды в один и тот же класс по общности типов процедур использования этих индивидов.

Ниже определяется *проблема формирования образов ситуаций* (ФОС), которая инициально полна. В ней предполагается, что наряду с вышеуказанным типом информации об образах задаются также определенные процедуры проверки принадлежности описаний индивидов к искомым образам, не требующие специальных обращений к оракулу.

Сформулируем инициально полную ФОС посредством указания ее отличий от аналогичных проблем формирования образов ситуаций, но инициально пустых. Для различения постановок ФОС каждой из них присвоим номер.

Пусть M_1 и M_2—заданные множества неэквивалентных к. н. ф. языка $L(\mathcal{A}^*)$, M—множество описаний ситуаций (в ПОУ^{ш}—позиций), полученных применением к ним M_1.

ФОСI определим как ПРОI из § 1.2 с параметрами $\langle M, Y_1, \rho_1, U_1, C_0, C_1\rangle$, где Y_1—некоторое подмножество абс. ПМ в M, U_1—инициально пустое множество входных записей, $\rho_1 \subseteq U_1 \times Y_1$, C_1—элементарные вычисления, а C_0—вопросы к оракулу.

ФОС2 аналогична ФОСI, однако, параметр M заменяется на M_2. По существу ФОС2 эквивалентна проблеме расшифровки булевых функций, представленных в виде формул, на основе вопросов к оракулу о том, являются ли элементы из M «единицами» или «нулями» искомых функций.

В свою очередь ФОС3 может иметь такие же параметры как ФОС2, однако множеством входных записей должно быть заданное конечное множество $\langle F,l\rangle$-целей, а отношение ρ по каждой $\langle F,l\rangle$-цели должно определять непустое множество оптимальных $\langle F,l\rangle$-образов.

ФОС3 инициально полна и по существу является проблемой синтеза закономерностей типа 0 (см. ниже).

Если в ФОС1—2 основной информацией об искомых образах являются указания о принадлежности или нет отдельных заданных описаний ситуаций к образу, то в ФОС3 в исходную информацию дополнительно включается принцип, по которому ситуации объединяются в один и тот же образ, а именно, их общий смысл, или процедура перехода от ситуаций образа к целевым.

Сравнительный анализ, в частности сложностной, проблем типа ФОС будет проведен в следующем параграфе. Здесь же отметим, что проблемы синтеза описаний, аналогичные ФОС3, можно сформулировать и для других типов индивидов, если указан некоторый алгоритм их связи с целевыми ситуациями основной проблемы, т. е. механизм выявления «полезности» этих индивидов.

2.3. *Синтез целей.* Согласно определению $\langle F,l\rangle$-образов, каждый из них одновременно является $\langle F,l\rangle$-целью. Следовательно, ФОС3 является частным случаем проблемы формирования новых целей на основе ранее полученных. Общую же проблему можно определить посредством изменения в ФОС3 множества возможных решений и соответствующего отношения ρ.

Пусть U_t—множество целей, построенных на t-ом шаге, и $U_t=\{E_1, \ldots, E_{r_t}\}$, где E_i—некоторая $\langle F_i, l_i\rangle$-цель. Множеством решений *проблемы формирования целей при известном* U_t, или ФЦ-U_t, будет множество U_{t+1}, составленное из произвольных $\langle E_j, l_j\rangle$-целей, где $E_j \in U_t$ и $l_j \leqslant l^*$ (см. § 3).

При этом отношение ρ каждой входной записи E_j ставит в соответствие ρ-образ из всех $\langle E_j, l_j\rangle$-целей при фиксированном E_j.

Ясно, что U_{t+1}, так же как и U_t, будет конечно.

2 4. Очередность для одной из форм развития языка $L(A^*)$ представляется нам в виде последовательности точных или приближенных решений ФОС3 и ФЦ-U_t, при которой решения предыдущих проблем включаются в состав начальных данных последующих. При этом в исходных ФОС3 и ФЦ-U_t множества элементов описаний—M_1 и целей—U_t формируются из списка дескрипторов, определяемых начальными данными ПОУ^{ш}. Вопрос согласованности решений ФОС3 с нашим пониманием знаний естественно обсудить в контексте использования образов и целей при решении ПОУ^{ш}. Это будет сделано чуть позднее, после рассмотрения проблемы синтеза закономерностей, использующих в качестве распознавателей, в частности, образы ситуаций.

3. Исходной информацией при *синтезе планов* являются заданные цель и множество закономерностей типов 0, 1, 2, 6, представленные быть может в форме графов «цель-подцель» или «часть-подчасть». По существу планирование есть поиск вывода в общем случае в некотором недетерминированном исчислении, т. е. допускающем использование недетерминированных правил вывода.

Синтез планов в рассматриваемых нами алгоритмах управления является частью алгоритма синтеза стратегий, и потому понятие оптимального плана должно быть согласовано в рамках соответствующей подпроблемы—$\langle F, l\rangle$ПСГ$^{ш}_{0}$. В частности, такой план, видимо, должен обладать достаточными достоверностью использованных в нем закономерностей и правдоподобием включенных в него целей, достаточными детализованностью и «осуществимостью» перехода от одной цели к другой.

4. Упорядочение θ_2—«цель-подцель» является формой представления множества заданных закономерностей, выделяющем возможные последовательности целей—планов. Для каждой пары целей E_1 и E_2, выделенных из соответствующей пары закономерностей, в θ_2 должно быть указано наличие или нет возможности построения E^i-стратегий из каждой позиции E_j-класса, i, $j = 1,2$. Представляется, что граф θ_2 будет ориентированным графом без циклов.

Упорядочение θ_1—«выигрышность», понимается нами как развитие θ_2 такое, что каждая связь между парами вершин в θ_1 проводится в результате совместного анализа очередности порождения вершин как целей, степени гарантированности существования стратегии, ведущей из одной вершины-цели к другой, а также сложности этой стратегии.

Отношение θ_3—„часть-подчасть", является формой представления множества целей и полностью определяется их списком.

Отношение θ_4—„мотив-цель", в значительной мере определяется отношениями θ_2 и θ_3.

Исходные графы θ_1, θ_2, θ_3 строятся, как уже отмечалось в начале параграфа, на основе дескрипторов основных целей ПОУ^{ш} и их подпрограмм.

5. *Проблема поиска* $\langle P, F, l\rangle$*-стратегий в графе игры* ($\langle P, F, l\rangle$ПСГ) формулируется аналогично ПСГ. Отличие ее только в том, что множество входных записей является множеством троек вида $\langle P, F, l\rangle$, а вместо оптимальных P-стратегий ищутся $\langle P, F, l\rangle$ -стратегии,

Ясно, что $\langle P, F, l\rangle$ПСГ представима в форме ПРО. При этом ввиду увеличения мощности возможных решений при каждой входной записи (из-за перехода от глобальных целей к локальным) сложность $\langle P, F, l\rangle$ПСГ может уменьшится. Тем не менее $\langle P, F, l\rangle$ ПСГ рассматривается нами в приближенной постановке.

Отметим, что программу поиска комбинаций в [161] можно отнести к процедурам решения $\langle P, F, l\rangle$ПСГ.

Согласованности проблемы синтеза $\langle P, F, l\rangle$-стратегий с исходной проблемой оптимального управления можно достичь, используя постановку ПСГ$^{ш}_{0}$, а именно, посредством перехода от $\langle P, F, l\rangle$ ПСГ^{ш} к $\langle P, F, l\rangle$ ПСГ$^{ш}_{0}$, аналогично переходу от ПСГ^{ш} к ПСГ$^{ш}_{0}$. Исключение „порочного круга" в этой проблеме, как уже отмечалось, достигается использованием в качестве первоначальных данных спис-

ка целей СЦ^0 и отношения выигрышности θ_1^0, порожденных исходными данными ПОУ^{ш}.

6. *Синтез алгоритмов, порожденных образами ситуаций.* Наличие $\langle F, l\rangle$-образа E указывает на то, что в каждой позиции E-класса можно прогенерировать некоторую $\langle F, l\rangle$-стратегию. Однако, как правило, в проблемах управления требуется конкретное указание таких стратегий. Поэтому наряду с проблемой формирования образов ситуаций—ФОСЗ, естественно определить проблему *формирования алгоритмов, порожденных* $\langle F, l\rangle$*-образами ситуаций* (ФАПО). Постановка этой проблемы отличается от ФОСЗ только тем, что множество решений T' состоит из алгоритмов, порожденных $\langle F, l\rangle$-образами, а отношение ρ каждой цели $\langle F, l\rangle$ ставит в соответствие класс таких алгоритмов.

Очевидно, что процедуры решения ФОСЗ и ФАПО взаимосвязаны. Построение оптимальных $\langle F,l\rangle$-образов требует проверки возможности построения $\langle F,l\rangle$-стратегий в каждой ситуации образа, а построение алгоритмов, порожденных $\langle F,l\rangle$-образами, предполагает предварительное построение оптимальных $\langle F,l\rangle$-образов. Поэтому более правильно говорить об объединенной проблеме *формирования образов и порождаемых ими алгоритмов* (ФОПА).

ФОСЗ была сформулирована нами в форме ПРО. Представляется, что и ФОПА можно свести к этой форме при выборе подходящего множества элементарных компонент алгоритмов. Если же эти алгоритмы рассматриваются только в виде слияния стратегий, то это сведение аналогично ПСГ.

Заметим, что ФОПА тесно связана с проблемой дедуктивного синтеза программ (см. § 1.1).

7. *Синтез закономерностей. Проблема формирования закономерностей типа* i(ФЗ-i), при i=0, 1, 2, 6, в нашем представлении аналогична *проблеме формирования* $\langle F,l\rangle$*-образов и порождаемых ими алгоритмов* (ФОПА) с отличиями, быть может, в структуре распознавателей и следствий, полноте использования или точности получаемых решений.

Закономерности типов 3—5, 7, а в определенном смысле также и типов 1, 2, 6 могут характеризовать классы закономерностей. При этом распознаватели u_{1-7} могут быть некоторыми описаниями классов закономерностей, в частности, их распознавателей или следствий. Так закономерности типов 3, 4 характеризуют строение распознавателей, применимых к позициям, а типа 5—связи общих свойств стратегий и достигаемых ими целей.

Можно сказать, что соответствующие проблемы—ФЗ-i при i=1—7, особенно при i=3—5, являются проблемами синтеза метазнаний. Их формализация на данном этапе наших исследований не проводится.

Закономерности типа 6 можно рассматривать как определенное приближение к типу 0, а соответствующую проблему синтеза как

ФОПА в приближенной постановке. Более подробный анализ закономерностей типа 6, а также один из алгоритмов их порождения будут приведены в § 4.6.

8. Заметим, что алгоритмы синтеза $\langle F, l \rangle$-стратегий в ПСГ одновременно порождают закономерности типа 0, в которых распознаватели применены только к одной позиции. Этот случай следует считать предельным для понятия «закономерность», поскольку смысл его предполагает именно множественность применения.

Отметим также, что разбиение проблем синтеза <знаний> на классы синтеза элементов языка и другие является относительным. Действительно, согласно § 6, отношение θ_1 является предикатом в расширении языка $L-L^0$, а закономерности можно рассматривать как формулы языка L^1, полученного последующими специальными расширениями L^0. Тогда соответствующие проблемы синтеза θ_1 и закономерностей типа 0 становятся проблемами синтеза описаний в языке L^1. Проблема синтеза $\langle P, F, l \rangle$-стратегий—синтеза индивидов типа стратегий, одновременно порождает определенные элементы языка $L(\mathcal{A}^*)$, а именно, добавляет к нему имена стратегий и др.

9. Как уже ранее было отмечено, большинство из рассмотренных нами типов <знаний> прямо или косвенно связаны с закономерностями, а именно, либо являются их компонентами, либо характеризуют процесс их порождения—очередность, сложность и др. Так все известные нам в настоящее время в ПОУ элементы языка являются распознавателями закономерностей. Отношения «выигрышность», «цель-подцель», «мотив-цель», характеризующие очередность, сложность генезиса закономерностей, а также планы—последовательности поочередно применимых закономерностей, ведущих к заданной цели из заданной позиции, могут рассматриваться как метазнания относительно закономерностей и др. Тем самым вопросы обоснования согласованности соответствующих проблем синтеза <знаний> с исходной, корректности постановки этих проблем, в частности, отсутствие в ней «порочных кругов», влияния рассматриваемых знаний на усиление разрешающих алгоритмов и др., сводятся к анализу тех же вопросов для закономерностей.

Так вопросы согласования проблем синтеза образов ситуаций, целей и алгоритмов, порожденных образами, с исходной проблемой управления, в основном сводятся к вопросам согласования проблем синтеза закономерностей типа 0, а точнее, согласования ФОПА, в точной или приближенной постановках, поскольку решения указанных проблем являются компонентами закономерностей в той или иной форме и используются в алгоритмах управления через них. Предпосылкой же того, что решения ФОПА могут быть знаниями, как это следует из гипотезы 1 и уже отмечалось ранее в § 4.4, является наличие в закономерностях типа 0 описаний оптимальных управлений для определенных ситуаций с одновременными условиями компактного их хранения и быстрого извлечения. Это достигается, в частности, минимальностью длин образов ситуаций при возможно большей мощ-

ности описываемых ими классов ситуаций, минимальностью времени выдачи управлений алгоритмами, порожденными образами, а также объемом требуемой для их хранения памяти. Заметим, что указанные критерии обязаны своим появлением, главным образом, системному подходу к проблемам синтеза. Именно изолированным рассмотрением этих проблем, в частности проблемы синтеза образов ситуаций, можно объяснить отсутствие в них достаточно эффективных критериев оптимальности до настоящего времени.

10. Рассмотренные выше проблемы синтеза знаний выделяют лишь фрагмент в совокупности вопросов синтеза знаний. Более сложные из них в настоящее время проходят этап предварительного обследования, предшествующего точным постановкам проблем.

К весьма трудным вопросам этого типа следует отнести вопросы дедуктивного синтеза программ при исходной информации в форме некоторых условий в заданном языке, а также, быть может, с единичными примерами работы программ. Ряд работ в этом направлении представлен в [155]. Вообще говоря, рассматривая $\langle F, l \rangle$-образы ситуаций как распознающие алгоритмы, проблему синтеза—ФОСЗ, также можно отнести к классу проблем синтеза программ. К ним относятся также ПСГ, ФЦ-U_i, ФЗ-i.

Еще более трудной представляется проблема обнаружения того или иного фактора, способного усилить алгоритмы управления. Например, проблемы возникновения понятий тех или иных подпрограмм, которые целесообразно включать в алгоритмы управления, или понятий конкретных типов записей, способных иметь в заданном алгоритме статус знаний.

Отметим, что к проблемам синтеза знаний близки и имеют с ними много общего проблемы извлечения и восстановления знаний из их хранилищ, в частности тезаурусов, учебников, справочников и др. В одних случаях это чисто проблема поиска, в других—поиска с дополнительной обработкой извлеченных записей, которая во многом аналогична синтезу знаний. Примерами последнего случая являются проблемы восстановления полного текста доказательств теорем или восстановления стратегий игроков-шахматистов по записи их партии. Определенные достижения по последнему направлению получены в [162].

Отметим, также, что проблемы синтеза элементов языка весьма тесно связаны с проблемами алгоритмизации построения символических моделей среды [100].

В заключение этого параграфа напомним, что шахматы возникли в определенной степени как модель реальных проблем управления, в частности войн. И потому сразу же с момента возникновения вобрали в себя многие из понятий и идей, индуцированных оригиналами. Этот процесс продолжается и в настоящее время.

Сказанное остерегает от попыток постановки проблем синтеза всех используемых шахматистами знаний в рамках проблемы оптимизации шахматных алгоритмов. Вопрос происхождения многих шахматных

знаний выходит за рамки этой проблемы и требует специальных исследований в рамках других проблем.

§ 8. К сравнительному анализу проблем формирования образов ситуаций

1. Введенное нами в § 2.1 понятие эквивалентности комбинаторных проблем исходит из того факта, что содержательно одна и та же проблема может иметь различные представления. Тем самым, как уже отмечалось ранее, сложность заданной проблемы, вообще говоря, будет зависеть от выбранного в рамках класса эквивалентности конкретного представления этой проблемы.

При выбранных критериях сложности и эквивалентности оптимальным представлением проблемы естественно считать такое, при котором сложность проблемы минимальна относительно всех проблем класса эквивалентности.

С оптимизацией представлений проблем, в частности, их адаптации, тесно связаны вопросы оптимизации разрешающих алгоритмов этих проблем, поскольку конструкции оптимальных алгоритмов могут быть основаны на использовании закономерностей, полученных как в рамках заданного представления, так и в процессе выявления структуры оптимального представления.

При поиске перспективных путей решения вышеуказанных вопросов возникает необходимость в выявлении связей между сложностью проблемы и параметрами, определяющими их конкретное представление. Ранее, в теореме 5.3, при определенных допущениях была описана связь между параметрами инициально пустых ПРО и нижними оценками $\pi(\sigma)$-сложности этих проблем. Используя выводы указанной теоремы ниже проводится сравнительный анализ эквивалентных проблем формирования образов ситуаций, имеющих либо традиционную постановку (ФОС1—2), либо порожденную из проблемы оптимального комбинаторного управления (ФОС3). Некоторые достаточные условия эквивалентности проблем тех же типов приведены в теореме 1.

2.1. Пусть $\langle M_2, Y_2, \rho_2, U_1, C_0, C_1\rangle$—параметры ФОС2, где, согласно обозначениям § 7, M_2—множество к.н.ф., а Y_2—множество ПМ в M_2. ФОС2 инициально пусто и расшифровка ПМ происходит посредством вопросов к оракулу о принадлежности или нет к нему описаний позиций в M_1, где M_1 также является множеством к.н.ф. Как уже отмечалось в том же § 7, постановка исходной проблемы, например ПОУ^{ш}, включает задание определенных дескрипторов, которые производят дискретизацию, разбиение среды на части и задают на них некоторые отношения, т. е. выделяют универсум и отношения на нем. Дескрипторы могут быть описаны по-разному, в частности, как в нашем случае через к.н.ф. в языке I порядка. Поскольку подмножества полученных таким путем к.н.ф. используются в постановках

подпроблем, связанных с исходной, в частности, M_1 и M_2 в ФОС2, то возникает вопрос о введении критериев оптимальности таких подмножеств и конкретном их выборе. Так, если понятие образа определено на множестве позиций $\mathcal{P}$, то было бы естественно в критерий оптимальности M_1 и M_2 включить требование об отсутствии склеиваний описаний позиций, принадлежащих образам, с позициями из их дополнений при переходе от $\mathcal{P}$ к описаниям в M_1, с одновременным требованием о возможно большем количестве склеенных позиций в пределах образов либо их дополнений, требование о возможности описания образов из $\mathcal{P}$ в M_2 и др.

С другой стороны, поскольку M_2—множество элементарных описаний, оно должно быть представлено из достаточно мелких единиц, например только дизъюнктов. При этом в ФОС2, в отличие от ФОС1 и 3, весьма существенен вопрос о связях M_2 с M_1. Описания ситуаций в ФОС2 при расшифровках ПМ задаются в M_1, и они являются основным источником информации о ПМ. Если описания ПМ ищутся в M_2, которое никак не связано с M_1, то возможность расшифровки ПМ сомнительна. Поэтому нами предполагается наличие некоторой процедуры перехода от M_1 к M_2, в частности, M_2 может быть равно M_1 либо быть множеством всех неэквивалентных дизъюнктов или атомарных формул, используемых в M_1.

Ниже принимается, что $M_2=M_1$, а выбор M_1 заранее произведен.

2.2. Пусть эквивалентные проблемы ФОС1, 2 и 3 заданы, соответственно параметрами $\langle M, Y_1, \rho_1, U_1, C_1, C_0\rangle$, $\langle M_1, Y_2, \rho_2, U_2, C_1, C_0\rangle$ и $\langle M_1, Y_2, \rho_3, U_3, C_1, C_0\rangle$, где M—получено применением M_1 к множеству позиций $\mathcal{P}$, $|M_1|=k$, $|M|=2^k$, при произвольном $u\in U_i$, $i=1, 2, 3$, мощности ρ_i-образов и множества возможных решений $|T'_{ui}|$ равны r_i и $\alpha_i|Y_i|$ соответственно. При вышеуказанных ограничениях из следствия 2.5 § 3.3. получаем следующее

Следствие 3 (теоремы 5.3). *При переходе от ФОС1 к эквивалентной ей ФОС2 $\pi(\sigma)$-сложность уменьшится, если отношение числа недопустимых решений для ФОС2 к числу недопустимых решений для ФОС1 будет меньше, чем $2^k/2^{2^k}$.*

Можно также утверждать об уменьшении $\pi(\sigma)$-сложности при переходе от ФОС2 к эквивалентной и отличной только инициальной полнотой ФОС3, если принять высказанное в § 3.3 допущение о возможности расширения теоремы 5 на инициально полные ПРО.

2.3. ФОС3, так же как и ФОС2, является проблемой восстановления к.н.ф., однако с дополнительной возможностью проверки «единиц» и «нулей» булевой функции посредством автономного анализа структуры векторов. Если ФОС1 и 2 можно назвать проблемами с известной принадлежностью ситуаций к образам и только с такой информацией, то ФОС3 является проблемой с известным принципом проверки «полезности» ситуаций относительно целевых ситуаций исследуемой проблемы управления.

Задание $\langle F,l\rangle$- цели как характерного свойства искомой ПМ

позволяет для каждой ситуации (точнее описания) из M проверить ее принадлежность к $\langle F,l\rangle$-образу без дополнительных вопросов к оракулу. Для этого достаточно проверить возможность построения $\langle F,l\rangle$-стратегии из этой ситуации. Тем самым $\langle F,l\rangle$-цель порождает определенное необходимое и достаточное условие отнесения ситуаций к $\langle F,l\rangle$-образу.

Представляется, что ФОС3 описывает процессы формирования образов на основе единичных примеров, когда каким-либо путем обнаруживается индивид с определенной степенью полезности, после чего описание этого индивида обобщается. Так, видимо, формируются образы «стол», «кошка», «солнце», «молоток» и др. Таким является алгоритм решения ФОС3 в [162], а именно, если в некоторой ситуации P алгоритму удалось уже найти $\langle F,l\rangle$-стратегию, то он пытается расширить описание P, например, применив к нему стандартный набор преобразований, сохраняющих свойства ситуаций порождать ту же $\langle F,l\rangle$-стратегию, отбрасывая заведомо избыточные элементы описаний ситуаций и др.

Правдоподобно предположение о том, что восприятие человека обладает врожденной способностью к обеспечению инвариантности синтезируемых им описаний объектов внешнего мира к определенным преобразованиям (в частности геометрическим и топологическим), а именно таким, применение которых к объектам не меняет отношения человека к их свойствам быть полезными ему в первоначальном смысле.

Заметим, что в известных постановках проблем формирования образов, в частности в приведенной в [35], в множество входных записей включаются примеры «единиц» и «нулей» искомой ПМ, что, вообще говоря, должно понизить сложность расшифровки.

Так, с учетом примечаний § 1, проблема формирования образов в [35] определяется следующим образом.

Известно, что существуют классы индивидов $K_1, \ldots, K_r$ одного и того же типа, например, ситуаций, которые непусты и попарно непересекаются. Априори заданы лишь подмножества индивидов каждого из этих классов $K'_1, \ldots, K'_r$ в форме их описаний в рассматриваемом языке $L(\mathcal{A}^*)$. Предполагается, что можно вычислить (при необходимости) значение истинности каждой формулы из M_1 на каждом из индивидов или что индивиды заданы своими полными описаниями в M_1.

Требуется построить распознающий алгоритм, который для произвольного индивида мог бы указать, к какому из классов $K_1, \ldots, K_r$ он принадлежит, если такое имеет место. В частности, построить алгоритм, основанный на описаниях классов $K_1, \ldots, K_r$ в языке $L(\mathcal{A}^*)$. Поскольку в нашей постановке ФОС указанное состояние «информированности» наступает на начальной стадии процесса расшифровки после первых же вопросов к оракулу, наличие априори заданных «примеров» нами не оговаривается.

3.1. При поиске оптимальных представлений некоторой проблемы проверка условий эквивалентности может оказаться весьма трудной задачей, во многих случаях обусловленной универсальным характером

задания этих условий. Представляет интерес выделение более специфических достаточных условий эквивалентности проблем конкретных типов. Ниже формулируется одно из таких условий для ФОС.

3.2. К. н. ф. E_1, E_2—решения в ФОС2(3) назовем эквивалентными, если множества ситуаций, выделяемых E_1 и E_2, совпадают. Ниже предполагается, что известны критерии выбора из множеств эквивалентных к.н.ф. тех, которые являются решениями в рассматриваемой проблеме, в частности, оптимальными образами.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для эквивалентности* ФОС$'_i\langle M', Y', \rho', U, C_0, C_1\rangle$ *и* ФОС$''_j\langle M'', Y'', \rho'', U, C_0, C_1\rangle$, $i, j=1, 2$, *достаточно, чтобы:* (1) *произвольный* ρ*-образ в множестве решений—к. н. ф., вместе с каждой к. н. ф. содержал все ему эквивалентные*; (2) *для произвольного* $u\in U$ *множества классов ситуаций, выделяемых* ρ*-образами* $\rho'(u)$ *и* $\rho''(u)$, *совпадали.*

Доказательство

a. Рассмотрим случай двух разновидностей ФОС2—ФОС′2 и ФОС″2.

Пусть $u\in U$, $E\in\rho'(u)$, $\mathcal{P}_u$ — множество позиций, выделяемых E из множества всех позиций $\mathcal{P}$, а $\mathcal{K}''$—критерий выбора из множества эквивалентных к. н. ф. тех, которые являются решениями в ФОС″2.

Из множества эквивалентных к. н. ф. в M'' с областью истинности $\mathcal{P}_u$ выделим произвольную к. н. ф. F, удовлетворяющую критерию $\mathcal{K}''$. F и будет решением в ФОС″2 при входе u. Действительно. Согласно условию (2) теоремы для $\mathcal{P}_u$ найдется хотя бы одна к. н. ф. F'' из $\rho''(u)$ с областью истинности $\mathcal{P}_u$. Поскольку F''—решение при входе u, то она удовлетворяет критерию $\mathcal{K}''$ и потому эквивалентна F. Но, согласно условию (1), вместе с произвольным решением из $\rho''(u)$ все эквивалентные ему решения также принадлежат $\rho''(u)$. Следовательно, $F\in\rho''(u)$.

Итак, по заданным $u\in U$ и решению из $\rho'(u)$ можно указать решение из $\rho''(u)$. Обратный переход от ФОС2″ к ФОС2′ производится аналогичным образом, что доказывает искомую эквивалентность ФОС2′ и ФОС2″.

b. Пусть теперь заданы ФОС′1 и ФОС″1, $u\in U$, $v\in\rho'(u)$, M'—получено применением M'_1 к $\mathcal{P}_u$ и для произвольного $\alpha\in M'$, $\mathcal{P}'(\alpha)=\{P\mid P\in\mathcal{P}$ и применение M'_1 к P дает $\alpha\}$. Аналогично определим $\mathcal{P}''(\alpha)$ для $\alpha\in M''$.

Для множества позиций $\mathcal{P}_u=\bigcup\limits_{\alpha\in\nu_1(v)}\mathcal{P}'(\alpha)$ выделим из M'' подмножество A такое, что $\bigcup\limits_{\alpha\in A}\mathcal{P}''(\alpha)=\mathcal{P}_u$. Из условия (2) следует, что A существует и, более того, ПМ $(A, M''\setminus A)$ принадлежит $\rho''(u)$. Последнее следует из того, что множества $\mathcal{P}''(\alpha)$ по всем $\alpha\in M''$ образуют разбиение $\mathcal{P}$, и потому для произвольных ПМ v_1, v_2 в M'', если $\bigcup\limits_{\alpha\in\nu_1(v_1)}\mathcal{P}''(\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\nu_1(v_2)}\mathcal{P}''(\alpha)$, то $v_1=v_2$. Обратный переход от ФОС″1 к ФОС′1 производится аналогичным образом.

c. Для завершения доказательства теоремы заметим, что доказательство достаточности условий (1) и (2) совпадает с п. a при переходе от ФОС′1 к ФОС″2 и с п. b — при переходе от ФОС″2 к ФОС′1. Теорема 1 сформулирована для случая совпадающих множеств входных записей исследуемых проблем. Однако ее нетрудно обобщить для произвольных множеств входных записей при дополнительном условии, что существует взаимооднозначное соответствие между классами синонимов $ФОС'_i$ и $ФОС''_j$ и оно известно. Ясно, что при этом предположении теорема будет справедлива и для ФОС3.

4.1. В [63] (см. также § 7.4) высказано предположение о том, что исчисление инвариантов $\tilde{\sum}$ для исходного исчисления $\sum$ „может оказаться" по существу „гораздо мощнее чем $\sum$, но иметь меньшую неопределенность". Распознавание выводимости в исчислениях можно рассматривать, в частности, как процесс синтеза закономерностей вида „$F_1 \Rightarrow F_2$", где F_1—доказуемая, а F_2—ранее доказанная формулы. В свою очередь ФОС3, как это уже отмечалось ранее в § 7, по существу также совпадает с проблемой синтеза закономерностей указанного вида (ФОПА), где F_1 понимается как распознаватель, а F_2—как описание цели. Исходя из этой связи, а также принимая, что „усиление" в исчислениях соответствует уменьшению $\pi(\sigma)$-сложности в ФОС3, интересно обнаружить вышеуказанный эффект „усиления" при переходе от исходного исчисления к исчислению инвариантов посредством перехода от исходной ФОС3 к некоторой другой ФОС3, удовлетворяющей требованиям, аналогичным требованиям к исчислению инвариантов.

Пусть $L_1 = \langle M_1^1, Y_2^1, \rho_3^1, U_3^1, C_0, C_1 \rangle$ и $L_2 = \langle M_1^2, Y_2^2, \rho_3^2, U_3^2, C_0, C_1 \rangle$— проблемы типа ФОС3 со следующими дополнительными к рассмотренным в п. 3.2 ограничениями: $|M_1^1| = |M_1^2|$, $U_3^1 = U_3^2 = U_3$, $r_3^1 = r_3^2 = r$, $\alpha_3^1 = \alpha_3^2 = \alpha$. Пусть также ρ_3^1 и ρ_3^2 определяют некоторые разбиения множеств входных и выходных записей, при которых все элементы произвольного ρ-образа выделяют одно и то же для этого образа множество позиций; произвольный класс синонимов A в L_1 разбивается на $m > 1$ классов синонимов $a_1, \ldots, a_m$ в L_2, а соответствующий A класс позиций B на классы $b_1, \ldots, b_m$ в L_2. Тем самым, если $u \in A$, а соответствующее u решение в L_1 выделяет множество позиций B, то это же множество позиций может быть выделено посредством решения L_2 для входных записей $u_1, \ldots, u_m$, соответственно из $a_1, \ldots, a_m$. Можно сказать, что каждый исследуемый класс позиций кодируется в L_2 посредством m кодов, вместо одного в L_1. Именно в этом смысле отношение L_1 к L_2 можно считать аналогом отношения исчисления инвариантов к исходному.

Из указанных ограничений на L_1 и L_2 следует, что $|Y_2^2| = m|Y_2^1|$, откуда, допуская распространение оценки теоремы 1 на инициально полные ПРО, получаем, что $\pi(\sigma)$-сложность L_1 меньше $\pi(\sigma)$-сложности L_2. Представляется естественным отнести это уменьшение за счет ис-

пользования в L_1 знаний о том, что классы решений в L_2 в определенном смысле эквивалентны и потому могут рассматриваться совместно, или единичные решения в L_1 могут быть инвариантами для классов решений в L_2. В то же время этот факт сам по себе не обеспечивает уменьшение $\pi(\sigma)$-сложности. Используя ту же оценку теоремы 5 легко усмотреть возможность и противоположного эффекта при тех же условиях кодирования, но измененных параметрах $|M_1^2|$, r_3^2, α_3^2.

Заметим, что L_1 и L_2 эквивалентны в более глубоком смысле, чем уточненное нами. Если наше определение позволяет оптимизировать представления проблем посредством, в частности, сужения ρ-образов одних и тех же классов синонимии, то более сильная эквивалентность может привести к сужению ρ-образов также посредством склеивания их классов. Представляется, что формализация указанной эквивалентности потребует большого проникновения в глубинные структуры проблем.

Отметим также, что возможное уменьшение $\pi(\sigma)$-сложности при переходе от ФОС1 к ФОС2 может быть частично объяснено использованием в ФОС2 «более мощных» выразительных средств. Действительно, элементарные описания в ФОС1 являются частными случаями конъюнкций, составленных из всех элементов M_1, а элементарные описания в ФОС2—являются конъюнкциями в M_1, и потому, вообще говоря, могут служить кодами подмножеств элементарных описаний ФОС1.

4.2. В соответствии с теоремой 5.3 параметры ФОС$_i$ в форме ПРО, $i=1,2,3$, при определенных допущениях определяют нижние оценки $\pi(\sigma)$-сложности разрешения этих проблем. Тем не менее имеются основания сложность рассматриваемых постановок ФОС считать высокой даже при приемлемых параметрах их представления. Одно из них состоит в высокой, как правило, стоимости проверки принадлежности элементарных описаний к искомому образу, независимо от того достигается это обращениями к оракулу или только посредством вычислений. Второе—в большой трудоемкости выбора оптимального образа в множестве возможных, сравнимой со сложностью построения минимальных описаний в заданном языке. Так, например, при решении ФОС3 возникает необходимость в многократных синтезе $\langle P,F,l\rangle$-стратегий, сравнении образов и выборе оптимального из них. Сложность синтеза $\langle P,F,l\rangle$-стратегий при этом сравнима со сложностью проблемы поиска выводов в исчислениях, что не проще решения NP-полной проблемы ТАВТ, а выбор оптимального образа сравним с построением минимальной к.н.ф. Учитывая ограниченный объем допустимых на практике вычислений или обращений к оракулу можно полагать, что решение ФОС в указанных постановках недостижимо. Возникает вопрос перехода к более реалистичным постановкам на основе этих проблем. Один из возможных путей его решения—ослабление требований в заданной ФОС, т. е. переход к ФОС′ с другим понятием оптимального образа, быть может, более слабого чем в ФОС,

но достижимого при ограниченном объеме вычислений и системно согласованного с исходной комбинаторной проблемой. Последнее означает, что решение ФОС′ при определенных условиях должно обеспечивать усиление алгоритмов, предназначенных для решения этой проблемы.

Поскольку усиление посредством обобщения индивидуальных решений является особым случаем усиления посредством накопления, выбор понятия оптимального образа определяется теми же условиями. Выделение же указанных условий связано с решением НОПТ и ряда современных проблем в области представления данных, быстрого их извлечения и др. Тем не менее уже сейчас можно описать некоторые частные решения рассматриваемого вопроса.

Пусть задан алгоритм f_0 с приоритетом обращения к тезаурусу относительно непосредственного синтеза стратегий. Пусть также тезаурус f_0 содержит некоторое непустое множество решений индивидуальных задач. Если теперь преобразовать f_0 в f' посредством обобщения каких-либо из этих решений, не увеличивая времени распознавания принадлежности к полученным образам, то f' будет сильнее f_0 за счет фактического увеличения множества точных решений при неизменном времени их извлечения. Используя сказанное, можно модифицировать ФОС3 к более реалистичной постановке. Предварительно отметим, что требование синтеза $\langle P,F,l\rangle$-стратегий излишне усложняет ФОС3, объединяя ее с другой независимой проблемой. Отделив ее, т. е. полагая априори заданным хотя бы один пример $\langle P,F,l\rangle$-стратегии, сформулируем ФОС4 следующим образом: для произвольной заданной $\langle P,F,l\rangle$-стратегии, времени распознавания принадлежности к образу не более τ и правдоподобия достижения $\langle F, l\rangle$-цели не менее η построить $\langle F, l\rangle$-образ с максимальной мощностью $\langle F,l\rangle$-класса.

В тех случаях, когда требование о построении образа максимальной мощности приводит к высокой сложности, ФОС4 можно решать приближенно, требуя лишь увеличения мощности $\langle F,l\rangle$-класса при неизменных τ и η, либо при увеличении τ или уменьшении η. Отметим, что аналогичные модификации возможны также на основе ФОС1 и 2. Однако в последних утверждения о точной принадлежности ситуаций к решениям-образам требуют обязательных проверок посредством обращений к оракулу, в то время как в ФОС4 они могут быть вычислены без него.

§ 9. Алгоритм поиска управлений на основе комплексного использования <знаний>

1. Принципы построения. **1.1.** Рассмотрим структуру шахматных алгоритмов управления, специфика которых в том, что выбор хода производится на основе совместного анализа всех рассмотренных выше типов <знаний>. Здесь будет дано описание схемы

АПУ и принципов работы отдельных ее компонент. Описание соответствующих программ, позволяющих реализовать АПУ этого типа разной степени полноты (АПУ^{01}, АПУ^{02}), приведено в [96].

1.2. Руководящими принципами при построении указанных АПУ были следующие:

1) полнота использования типов шахматных <знаний>;

2) возможность последовательного наращивания блоков АПУ, перехода от простого к сложному;

3) возможность исследования эффективности отдельных информационных и алгоритмических структур методом турниров.

Одним из путей обеспечения указанных требований для нас являлось стремление к пониманию игры шахматных мастеров в процессе их роста и формализации используемых ими методов.

В игре шахматистов можно выделить следующие особенности:

1) полное рассмотрение всех веток из данной позиции только при малой глубине анализа;

2) анализ отдельных веток не более ограниченной длины;

3) использование прошлого опыта, представленного в форме гипотез разной достоверности;

4) обобщенный анализ, при котором отсекаются заведомо слабые и выделяются перспективные ветки;

5) реальный анализ ветвей, выделенных после обобщенного анализа;

6) использование гипотез о возможности представления глобальной цели (выигрыша) как последовательностей локальных целей, достижение которых обеспечивает глобальную.

На разных стадиях игры шахматист обращается к разным типам накопленных им знаний.

При разыгрывании дебюта шахматист использует знание закономерностей типа: главное—захват центра, не ходить одной фигурой дважды, быстро развить фигуры и др. Однако на этой стадии он в основном следует известным ему дебютным стратегиям.

К 10-му ходу дебютные цели в основном достигаются и шахматист приступает к выработке стратегического плана. На этом этапе происходит обобщенный анализ позиции с использованием списков, правдоподобных в этой позиции целей, планов, а также рекомендаций, релевантных к позиции закономерностей. Выделенная стратегическая цель разбивается на множество тактических, из которых формируется пучок наиболее интересных планов, обеспечивающих достижение стратегической цели. Далее шахматист приступает к реализации одного из этих планов. Для этого в первую очередь делается попытка извлечь из памяти релевантную к первой тактической цели плана справку, в частности, о конкретных алгоритмах игры, комбинациях, форсированных вариантах, фрагментах ранее сыгранных партий и др. Если эти данные обеспечивают достижение рассматриваемой цели, то игра проводится соответственно им. В противном случае, используя их, шахматист приступает к непосредственному анализу вариантов и

синтезу собственной стратегии. Полученная справка призвана облегчить этот анализ, в частности, отбросить явно слабые и выделить наиболее интересные ветки для последующего подробного анализа.

Указанная схема является типовой для среднего шахматиста. Игра мастера обогащается в первую очередь за счет объема накапливаемых знаний, типы и малая часть которых уже известны среднему шахматисту. К ним относятся дебютные стратегии, списки целей и планов, закономерности, отношения между целями, комбинациями, ловушки и др. Разные общие рекомендации, известные уже начинающему шахматисту, для мастера пополняются богатым конкретным содержанием. Он помнит конкретные партии или фрагменты, сыгранные при реализации конкретных планов, детальный анализ, проведенный им или другими, помнит позиции с решениями в них и позиции стремления. Существенно улучшается игра шахматиста также вследствие повышения качества приобретенных им знаний. Уточняется описание закономерностей и оценка их достоверности, обогащается и детализируется отношение выигрышности на множестве целей и др.

Безусловно, повышение мастерства обуславливается также ростом знаний шахматиста о противнике, набором его психологических и спортивных приемов, общей культурой и др. Однако этот тип данных остается вне предлагаемой схемы использования шахматных <знаний>.

Перейдем к описанию АПУ с комплексным использованием шахматных <знаний>. Предварительно уточним понятие «фонда записей».

2. Фонды. Множество записей тезауруса, объединенных некоторой совокупностью общих свойств α, будем называть *фондом типа* α.

Каждый элемент фонда кроме основной записи содержит некоторую различительную часть (поисковый образ), на основе которой в фонде создается структура для быстрого и эффективного поиска. Соответственно каждому из типов <знаний> (шахматных) выделяются, в частности, следующие фонды: постановки ПОУ^{ш} (алгоритмы порождения допустимых ходов, правила окончания и др.); отношений $\theta_1,\ldots,\theta_6$; слияний P-стратегий и их компонент; закономерностей; целей, в частности, образов позиций; планов; партий из «Информатора» и комментариев к этим партиям; собственных партий и др.

В тезаурусе выделены также области для *справочных* дескрипторов и текущей игры, описания которых приведены ниже.

3. Справочная дескрипторов. Для удобства вычислительных и поисковых операций, связанных с дескрипторами, используется справочная дескрипторов (СД), в которой для каждого дескриптора D могут быть указаны следующие характеристики:

А. 1) D вычисляет предикат (функцию);
2) D определяет цель: да (нет);
3) дебюты: тип дебюта и частота использования (ч.и.) D в нем;
4) стадия игры: стадия игры и ч.и. D в ней;
5) локальность: ч.и. как л.ц.;

6) комбинационность: ч.и. в комбинациях;

7) тактичность: ч.и. в качестве тактической цели;

8) стратегичность: ч.и. в качестве стратегической цели;

9) сложность вычисления D: время вычисления D;

10) индивиды: список индивидов, на которых проверяется D;

Б. В этой части описания дескрипторов хранятся номера дескрипторов из окрестностей и покрытий I порядка для $\theta_1, \ldots, \theta_6$, а также информация, связанная с анализом графов θ_2, θ_3, θ_4 (см. § 5).

В. 1) закономерности: ссылки к закономерностям, релевантным D;

2) планы: ссылки к планам, связанным с D.

Характеристики с индексом А используются в основном при формировании списка возможных целей, а с индексом Б—при вычислении правдоподобия целей, их согласованности с упорядочением относительно θ_1 и при обходе деревьев, порожденных отношениями «часть-целое» и «цель-подцель».

4. Описание класса АПУ с комплексным использованием шахматных знаний. В § 3.5 был описан класс АПУ $\mathscr{B}_1$, которому, по предположению, принадлежит α-оптимальный. В данном разделе посредством конкретизации работы каждой из компонент алгоритмов этого класса, а именно, тезауруса $\theta(W)$ и подпрограммы поиска в нем f_1, подпрограммы синтеза стратегий f_2 и координатора f_3, будет выделен еще более узкий подкласс АПУ $\mathscr{B}_{11}$, объект нашего непосредственного исследования.

Блок-схема АПУ класса $\mathscr{B}_{11}$ приведена на рис. 2. Уровень детализации блок-схемы выбран таким, чтобы каждый из элементов $\mathscr{B}_{11}$ можно было бы получить выделением некоторой подсхемы основной схемы рис. 2 и конкретизацией подпрограмм, типы которых указаны в этой подсхеме.

Опишем работу алгоритмов из $\mathscr{B}_{11}$ на уровне блок-схемы рис. 2. Через $\langle i \rangle$, $i=1, 2, \ldots$, будем обозначать номер отдельной подпрограммы, а саму схему будем называть *исходной*.

4.1. В блоке <1> производится *анализ очередности последнего сделанного хода*. Если это был свой полуход или право первого полухода принадлежит противнику, то последнему дается соответствующее сообщение. Если же это был полуход противника или первый ход свой, то управление передается в блоки <24> или <2> соответственно. Рассмотрим второй случай. Блок <1> передает управление в <2>, где *формируется запрос к тезаурусу*. Запрос включает позицию Р доски. Прежде чем на ее основе построить поисковое предписание в блоке <3> происходит *распознавание стадии игры* для анализируемой позиции Р, в частности стадий дебюта, миттельшпиля, эндшпиля.

Отметим, что на первом этапе реализации АПУ предполагается исследование в основном миттельшпильных и эндшпильных позиций.

4.2. Поиск знаний в тезаурусе производится на основе *поискового предписания* (ПП), которое формируется (блок <4>) на основе позиции Р с учетом стадии игры и, быть может, другой дополнительной информации, локализующей область поиска.

Как правило, позиция Р включается в ПП полностью, так как каждый ее элемент потенциально может потребоваться при поиске. Такое включение возможно, так как позиции в отличие от ситуаций другого типа, например, фотографий, задаются достаточно сжато и компактно.

Если заранее известно, что распознавание знаний, релевантных к Р, основано на описании Р известного типа, то составляется это описание. Например, это могут быть индексы наиболее правдоподобных в Р целей из фиксированного списка.

4.3. На основе ПП производится поиск в тезаурусе релевантных к Р <знаний>, совокупность которых выдается в форме *справки* (блок <5>).

Согласно алгоритму поиска производится сравнение ПП с поисковыми образами (ПО) тезауруса, т. е. происходит распознавание ПО, области истинности которых принадлежат ПП. С этой целью, в частности, ПО каждого элемента фондов тезауруса проверяется на выполненность в позиции Р. В результате этих сравнений выдается соответствующая первая справка к позиции Р. В дальнейшем по мере необходимости эта справка пополняется.

Справка <знаний> имеет форму последовательности записей, предположительно релевантных к Р.

Содержимое справки определяется наличием запаса конкретных записей фондов, структурой связей между фондами и соответствующим алгоритмом поиска. Справка к P записывается в позицию w_1 *справочной текущей игры* (СТИ). СТИ предназначена для записи играемой в данный момент партии и всех типов информации, использованных в процессе выбора ходов этой партии. Она может быть представлена в форме таблицы, в строках которой (области w_j в фонде) записываются следующие данные:

w_{00}: номер полухода i;

w_0: позиция P_i, в которой *сделан* полуход c_i;

w_1: справка к P_i;

w_2: ход c_i в P_i свой;

w_2': ходы в P_i противника, в соответствии с выбранной нами стратегией;

w_3: причина хода c_i в P_i, если c_i свой ход, либо причины хода c_{i+1}' в P_i для хода противника c_{i+1}';

w_4: запись текущей стратегии из P_i (с корнем P_i);

w_5: пучок планов $\Pi(g_i)$, выработанных в <18>, на основе разложения g_i;

w_6: текущий план $(h, q_1 \ldots, q_r)$ и цель из нее, для которой была выработана стратегия в $P_i(w_4)$ (см. блок <21>).

В области w_2', если в данный момент в P_i полуход противника, записываются все предполагаемые ответы противника на предыдущий наш ход согласно нашей текущей стратегии. Заметим, что в случае,

когда ход противника в P_i отличен от ходов, предусмотренных в текущей стратегии, то причины хода противника (гипотезы об их смысле) должны быть выработаны с учетом этого расхождения. Заполнение w_3 может быть организовано как в процессе текущей игры, так и после нее. Заметим, что СТИ должна также способствовать устранению дублирования вычислений. В частности, в ней может записываться информация по устранению повторного рассмотрения бесперспективных ветвей [4].

4.4. *Анализ справки к* Р (блок <6>) производится с целью рассмотрения возможности выбора хода в Р на основе ранее накопленных решений в позициях, сходных с Р. Предполагается, что эти решения имеют эффективность не меньшую, чем результаты собственного выбора, и потому приоритет отдается им. При этом можно заранее упорядочить список рекомендаций в сходных позициях по силе игроков, которыми они принимались. Например, в настоящее время рекомендации «Информатора» можно считать более предпочтительными, чем ранее найденные собственные решения.

Содержимое справки в миттельшпиле проверяется на релевантность к Р в следующем порядке:

1) для $\langle P,F,l\rangle$-стратегий (алгоритмов игры, комбинаций, форсированных вариантов, ловушек и др.);

2) для закономерностей, указывающих на конкретный ход в Р;

3) для фрагментов сыгранных партий.

При анализе дебютных или эндшпильных позиций в первую очередь ищутся дебютные или эндшпильные стратегии из Р.

Как только в указанной очередности обнаруживаются данные, позволяющие произвести ход в Р, происходит передача управления блоку <7>: <ход по справке>. В противном случае, т. е. когда либо отсутствует справка, либо она неудовлетворительна для прямого использования, принимается решение о формировании собственной стратегии на основе алгоритма синтеза стратегий в графе игры (АСС). В связи с этим решением возникает необходимость в извлечении специальных данных из тезауруса, усиливающих АСС. В нашем рассмотрении такими данными на начальном этапе работы АСС считаются закономерности типа 2, которые характеризуют возможность достижения в анализируемой позиции той или иной цели, а также необходимые при дальнейшей работе АСС отношения $\theta_1-\theta_5$ и др. Рассмотрим процедуру извлечения указанных закономерностей из тезауруса.

4.5. *Формирование целей* релевантных к заданной позиции происходит в блоках <10>—<12>.

В блоке <10> происходит *формирование области целей* для дальнейшего анализа этих целей. По существу в этом блоке производится отбрасывание тех известных целей, достичь которых в анализируемой позиции явно невозможно.

Критериями такого выбора могут служить рекомендации по использованию дескриптора как цели, сложность вычисления дескрип-

тора, частоты использования дескриптора в качестве цели на разных стадиях игры (комбинационной, тактической, стратегической, локальной, глобальной и др.) и др.

Результатом работы блока является список Q_1 номеров дескрипторов целей, релевантных к Р.

В блоке <11> производится вычисление правдоподобия каждой из целей списка Q_1, выделенного в блоке <10>, в соответствии с алгоритмом вычисления правдоподобия целей § 5. Указанный алгоритм по существу распознает достижимость целей из заданного списка Q_1 или, другими словами, характеризует возможность построения соответствующих Р-стратегий.

Отметим, что практические процедуры вычисления правдоподобия целей используют в той или иной мере знания о трудностях достижения целей в позициях, сходных с анализируемой, т. е. отношение реализуемости θ_5.

Результатом блока <11> является список Q_2 пятерок следующего вида:

<цель; правдоподобие цели для себя (для противника) относительно θ_3, и то же самое для θ_4>. Ясно, что если дескриптор F рассматривается как цель <создать F>, при F, вычисленном для себя, то он же индуцирует цель <создать $\neg F$>, если F вычислен для противника.

При построении Q_2 вычисления можно производить либо последовательно по цвету (вначале для себя по всем дескрипторам, потом для противника), либо для данного дескриптора сразу для каждого цвета.

В блоке <12> производится выделение целей с высоким правдоподобием отдельно для θ_3 и θ_4 на основе следующего правила: если $q^* \in Q_2$ и $z^i(q^*, P)$ наибольшее относительно θ_i $i=3, 4$, то $Q_2^i = \{q | z^i(q, P) \geqslant m_i(z^i(q^*, P))\}$, где $0 < m_i \leqslant 1$.

Затем берется объединение $Q_2' = Q_2^3 \cup Q_2^4$, элементы которого упорядочиваются с учетом их абсолютных значений $z^i(q, P)$, а также факта одновременной максимальности в обоих списках Q_2^3 и Q_2^4. В частности, цели можно упорядочить относительно арифметического среднего их правдоподобий.

Заметим, что вычисление правдоподобия целей можно было бы проводить на основе объединения графов θ_3 и θ_4. Именно такой подход принят нами в реально построенном алгоритме правдоподобия [96] (см. также § 2.6).

В соответствии с закономерностями типа 2, каждая цель с правдоподобием выше определенного порога дает основания для поиска стратегии ее достижения. Однако прежде чем приступить к непосредственному поиску таких стратегий, целесообразно проверить, есть ли в тезаурусе какая-либо информация, связанная с достижением выделенных целей. Это могут быть конкретные стратегии или ходы, рекомендации и др., поисковыми образами которых являются наборы

выделенных целей. Поскольку такая информация может значительно уменьшить перебор в дереве игры, блок <13> производит ее поиск в тезаурусе; при этом, поисковое предписание строится из выделенных целей. Извлеченная информация добавляется к ранее полученной справке, после чего управление передается алгоритму синтеза стратегий, а точнее блоку <14>. Предварительно справка пополняется отношениями $\theta_1 - \theta_5$ и, быть может, другой информацией, непосредственно относящейся к синтезу стратегий.

4.6. Поиск стратегий в графе производится в блоках <14>—<22>. Он состоит из предварительного выделения наиболее обещающей области поиска посредством формирования планов и непосредственно поиска в графе на основе целей выбранного плана.

Построение планов происходит в блоках <14>—<19>.

Ранее, в блоке <12>, список Q_2 целей упорядочивался относительно значений правдоподобия этих целей. В блоке <14> производится *упорядочение* этого же *списка* Q_2 относительно отношения выигрышности θ_1, после чего в блоке <15> результаты полученных упорядочений—списки Q_2' и Q_2'', подвергаются *совместному анализу* для выделения из Q_2 целей, устойчивых к упорядочениям в Q_2' и Q_2'' одновременно. Например, можно выписать ту ветвь из Q_2'', которая наибольшая по длине, и выбрать из нее определенную часть тех целей, которые первыми появляются в Q_2'.

Другой принцип такого совместного анализа может быть основан на предварительном выделении максимально связного подграфа θ_1' графа θ_1, содержащего вершины из Q_2, и последующего „взвешивания" вершин θ_1'. Для этого выделяется центр сгущения a из θ_1', который определяется как вершина, в наибольшей мере сравнимая с другими. Центру сгущения a приписывается вес α. Если $R_i^1(a)$—окрестность i-ого порядка для a, то каждой вершине $c \in R^1(b)$ приписывается вес $(\gamma - 1)$ при условии, что $b \in R_i^1(a)$ и b имеет вес γ.

Ясно, что все вершины из окрестности a одного и того же порядка получат одинаковые веса. Приняв вес вершин, максимально удаленных от a, за 1, получим численные выражения для всех остальных весов.

Выбор наиболее правдоподобной цели, устойчивой к θ_1, производим по формуле: $\max\limits_{x \in \theta_1'} \dfrac{\alpha(x) + z(x)}{2}$, где $\alpha(x)$—вышеуказанный вес вершины x, а $z(x)$—его правдоподобие.

Результатом работы блока <15> является множество целей $Q_3 = g_1 \ldots, g_r$, равносильных относительно возможностей поиска путей их достижения при совместном анализе по θ_1 и по правдоподобию. В зависимости от стадии игры в множество Q_3 могут попасть цели разных типов: в дебюте—слабо связанные с выигрышем материала, в дальнейшем—более непосредственно.

При анализе в блоке <15> необходимо учесть, что глобальные

цели—это наиболее определенные и основные, затем следуют цели выигрыша материала, а затем остальные. Чем определеннее цель, т. е. чем сильнее она связана с глобальными, тем она предпочтительнее при выборе.

Для каждой цели g_i списка Q_3, $i=1, \ldots, r$ в блоке <16>—*разложения текущей цели* g_i, из взвешенного графа θ_2 „цель-подцель" выделяется подграф θ_2^i определенного диаметра, для которого цель g_i является корневой. Предварительно каждая вершина θ_2^i, которая принадлежит также Q_2, помечается значением своего правдоподобия.

В графе θ_2^i производится построение планов достижения наиболее выигрышных в θ_2^i целей из исходной цели g_i. Для этого в блоке <17> анализируются те подграфы θ_2^i, которые включают некоторую наиболее выигрышную цель g в θ_2^i, g_i и часть θ_2^i, обеспечивающие выполнение g при подъеме в нем из g_i снизу вверх. В каждом таком подграфе выделяются последовательности целей—планы, обеспечивающие, согласно θ_2, выполнение g. Из этих планов сохраняются только те, в которых сумма правдоподобий целей выше заданного порога.

Указанные вычисления производятся для каждой цели из Q_3. Результатом работы блоков <16> и <17> является список планов $\text{СП}(Q_3)=\bigcup_{i=1}^{r}\text{СП}(g_i)$. Предполагается, что критерии формирования списков планов можно подобрать такими, чтобы $\text{СП}(Q_3)$ не оказался пустым, в частности, сделать критерии итеративно ослабляющимися или усиливающимися.

Для ускорения процесса построения $\text{СП}(Q_3)$ и повышения качества планов в <17> могут быть предусмотрены обращения к тезаурусу для извлечения рекомендаций по построению планов, в частности, их полезности в прошлом, учет сложности вычисления дескрипторов целей в соответствии с θ_5, частоты обращений к подпрограммам, указанным в θ_6, и др. Однако такие усовершенствования требуют специального дополнительного анализа.

Планы $\text{СП}(Q_3)$, вообще говоря, являются стратегическими, т. е. требуют построения стратегий большой глубины. Поэтому на основе $\text{СП}(Q_3)$ и графа θ_3 „часть-целое" в блоке <18> производится *построение тактических планов,* цели в которых уже должны иметь тактический характер, облегчающий анализ возможности их достижения при поиске в графе. Тактические планы строятся для первых целей g_i каждого плана из $\text{СП}(Q_3)$. Для этого выделяется подграф θ_3^i, связанный с целью g_i, который анализируется по тем же принципам, что и в блоке <17>. В результате анализа каждый план из $\text{СП}(g_i)$ порождает свой список детализованных планов, которые в совокупности образуют общий пучок планов $\Pi(g_i)$. Прежде чем перейти к непосредственному поиску стратегий, в блоке <21> производится коррекция пучка планов $\Pi(g_i)$ на основе ранее полученной справки к P. Скорректированные планы переписываются в область w_5 СТИ(блок <20>).

Таким образом, если список стратегических планов СП(g_i) состоял из планов $h_1=(g_i, s_{11}, \ldots, s_{1r_1}), \ldots, h_m=(g_i, s_{m_1}, \ldots, s_{mr_m})$, то окончательный список П(g_i) принимает следующий вид:

$$h_{11}=(p_{11}, \ldots, p_{1t_1}, h_1), \ldots, h_{1l_1}=(p_{l_1 1}, \ldots, p_{l_1 t_{l_1}}, h_1),$$

$$h_{m1}=(p_{11}, \ldots, p_{1t_1}, h_m), \ldots, h_{ml_1}=(p_{l_1 1}, \ldots, p_{l_1 t_{l_1}}, h_m).$$

В дальнейшем, говоря о стратегических целях из СП(Q_3), будем иметь в виду цели, обозначенные через s_{ij}, а о тактических — цели, обозначенные через p_{ij}.

4.7. *Алгоритм синтеза* $\langle P, F, l\rangle$*-стратегий в графе* (*АСС*) является разновидностью АПУ, перерабатывающей записи вида $\langle P, F, u\rangle$, где F—некоторая цель, P— позиция, u—некоторая запись из тезауруса, в $\langle P, F, l\rangle$-стратегию, при максимально большом l.

В нашем рассмотрении F есть цель p_{ij}, записанная в w_6, а АСС по существу является расширенным вариантом алгоритма синтеза комбинаций при заданной цели, приведенного в [161].

В первую очередь АСС (блок $\langle 21\rangle$) стремится выработать комбинацию или форсированный вариант для текущей цели. Другие стратегии получаются как результат неудачных попыток построить первые.

На первом этапе стратегия ищется для цели p_{11} из П(g_i). В случае неудачи последовательно производится анализ для последующих целей $p_{21}, \ldots, p_{l_1 1}$ соответствующих планов.

Если для некоторой цели p_{ij} стратегия будет выработана, то дальнейшее рассмотрение производится только с теми из планов П(g_i), которые начинаются с p_{ij}. Остальные планы из w_5 стираются. Этот принцип отбрасывания планов сохраняется при каждой очередной попытке синтеза стратегий для заданной цели.

В случае достижения цели p_{ij} и необходимости анализа новой рассматривается цель, непосредственно следующая за p_{ij} в первом из планов П(g_i), где p_{ij} встречается. Она же заносится в позицию w_6 СТИ. Пусть на t-ом этапе синтеза стратегий в П(g_i) остались планы $H_1=(q, p_{i1}, \ldots, p_{j1}, h_{i1}), \ldots, H_n=(q, p_{in}, \ldots, p_{jn}, h_{in})$, цель q уже достигнута, но попытки достичь каждой из $p_{i1}, \ldots, p_{in}$ окончились неудачей. Тогда анализируются цели, непосредственно следующие за указанными до исчерпания всех тактических целей из w_5. Если и эти возможности исчерпаны, а АСС еще не выработал стратегии, выдается недостроенная стратегия, полученная при первой попытке построить ее, т. е. для цели p_{i1} (по существу некоторая гипотеза о $\langle P, F\ l\rangle$-стратегии).

Каждая попытка построения стратегии для текущей цели, так же как и в [161], слагается из последовательных шагов по выдвижению планов своего хода, рассмотрения основных опровержений противника, модификации плана, снова своего хода и т. д. Этот процесс имеет много сходного с последовательностью шагов алгоритма из [15], который

вначале вырабатывает траекторию (комлевую) для л. ц., анализирует положительные и отрицательные факторы, связанные с реализацией этой траектории, а затем изыскивает возможности вовлечения или отстранения этих факторов. Поскольку в общем случае анализируемые АСС собственные ходы не являются форсированными, то число возможных ответов противника резко возрастает, а каждый ответ требует более тонкого анализа. В связи с этим значительно возрастает объем требуемых вычислений. Для сдерживания их роста существенное значение приобретают закономерности по отсечению бесперспективных ветвей, в частности типа [30]. Часть из них ранее была получена в справке к Р. Однако большинство извлекается в процессе непосредственного анализа ветвей при синтезе стратегий. Для этого предусматривается связь блока <21> с блоками <3>—<5>—поиска знаний в тезаурусе, при посредничестве блоков <2> и <6>.

Заметим, что возможна организация АСС, при которой алгоритму предлагается не одна, а несколько целей из планов области w_5 и АСС пытается достичь одной из них с учетом их упорядочения. При этом не исключено, что для более дальней цели плана стратегия будет построена раньше, чем для ближней.

Отметим также, что рассмотренный АСС, следуя терминологии [52], следует отнести к типу «мотивы—тема—средства» или в нашей интерпретации: «мотивы—цель—стратегия». Одна весьма типичная схема синтеза стратегий вида «мотивы—средства—тема», когда основная цель формируется в процессе анализа вариантов, порожденных мотивами. Представляет интерес сравнение возможностей АСС, построенных по каждому из этих принципов, между собой, а также с действиями и результатами шахматистов при заданных одних и тех же исходных данных. Для последней задачи можно воспользоваться, в частности, правдоподобными объяснениями процесса зарождения комбинаций из [52].

В заключение этого раздела приведем краткую сравнительную характеристику АПУ, использующих α-β-процедуру (а) и АСС, основанном на предварительном выдвижении целей (б).

1. Принцип сокращения области поиска в графе игры:

а) выдвижение гипотез о границах оценок позиций, отбрасывание бесперспективных областей в нижних ярусах графа;

б) отбрасывание областей, не обеспечивающих поставленной цели, в верхних ярусах графа.

2. Зависимость от индивидуальных особенностей исходной позиции:

а) по нашим данным, границы α и β выбираются независимо от исходной позиции, а оценочная функция одна и та же при оценке каждой позиции;

б) цель определяется специфичностью исходной позиции, что порождает соответствующую направленность при оценке позиций, получаемых из исходной.

3. Выбор глубины перебора при фиксированном объеме вычислений:

а) изначально задается и только для форсированных вариантов увеличивается по необходимости;

б) определяется рассматриваемой целью и весьма индивидуальна.

4. Учет опыта прошлых игр:

а) усреднен и включен в оценочную функцию;

б) отражен через список возможных целей и индивидуализируется через выбор цели, релевантной к анализируемой позиции.

Представляется, что по первому критерию предпочтительнее метод выдвижения целей. Тем не менее данное сравнение не позволяет дать исчерпывающего обоснования выбору лучшей из этих двух типов поиска. Для этого требуются более точные количественные оценки. Наш выбор в пользу АПУ с выдвижением и проверкой целей объясняется нашим намерением исследовать возможности усиления комбинаторных алгоритмов посредством накопления целей. Отметим, что α-β-процедура сокращения перебора и использование целей могут быть совмещены в одном и том же АПУ, как это сделано в [2].

4.8. *Реализация хода.* После записи в w_4 СТИ выработанной P-стратегии G (при первом полуходе своем) управление передается блоку <23> для реализации этого полухода согласно G. Теперь рассмотрим последний из указанных в п. 4.1. случаев, когда последний полуход принадлежал противнику. В этом случае (после полухода противника) в блоке <25> проверяется: предусмотрен ли ход противника в стратегии G. Если ход предусмотрен, то производится переход к <23>, иначе—к блоку <26> для проверки конца игры. Ход противника может быть не предусмотрен, в частности, если запись в w_4 есть некоторая гипотеза о стратегии, в которой проанализированы не все возможные ответы противника. Если после такого хода игра не окончена (блок <26>), то переходим к блоку <28>, иначе—к печати и останову. После выполнения своего хода в <23> он записывается в w_2 СТИ, а затем проверяется: является ли полученная позиция матовой или патовой (блок <9>). Если игра окончена, содержимое СТИ записывается в фонд партий и после печати результатов игры программа останавливает работу.

В противном случае право хода передается противнику и после его выполнения записывается в w_2' (блок <24>). Выполнение своего хода в <23> не производится только тогда, когда ход противника привел к некоторой концевой вершине P' стратегии G. В этом случае управление передается блоку <28>, в котором проверяется, достигнута ли текущая цель. Возможны следующие исходы.

1. В P' достигнута тактическая цель q, преследуемая G, по плану $H=(q, q_1, \ldots, q_r, h)$, записанному в w_6. В этом случае в блоке <29> производится стирание q во всех планах из w_5 и w_6. Затем в блоке <30> проверяется, исчерпаны ли все цели из w_6?

Если $r \neq 0$, т. е. имеется очередная тактическая цель, то производится переход к АСС (блок <21>).

Если $r=0$, но $h=(s_1, \ldots, s_m)$ непусто, т. е. $m \neq 0$, то управление передается в блок <18> для разложения s_1 на тактические цели.

Если же $r=0$ и $m=0$, то организуется построение новых планов изначально от блока <2>. Надо полагать, что должна быть определенная преемственность между ранее полученным списком планов и искомым. Однако здесь анализ этой связи не проводится.

2. Цель q в P' не достигнута. Это может произойти, в частности потому, что G была недостроенной стратегией, т. е. гипотезой о стратегии. Так как появление такой гипотезы было связано с исчерпанием рассмотрения всех ранее выработанных тактических целей, то производится переход к блоку <2> для построения новых целей и планов.

Отметим, что взамен этого перехода не лишено смысла рассмотрение возможности достичь ближайшей стратегической цели s_1 из плана H, так как если бы цель q уже была достигнута и только в случае и этой неудачи, перейти к формированию планов через блок <2>.

Из вышеизложенного следует, что в лучшем случае игра будет протекать согласно G до концевых вершин, в которых будут достигнуты цели, преследуемые G. После этого будет выбрана новая стратегия или произойдет останов.

Если же ход противника не был заранее предвиден в G, то переход к синтезу новой стратегии происходит до исчерпания G.

5. В заключение данного раздела подчеркнем, что вышеизложенное есть только схема комплексного использования знаний при поиске управлений, в частности использования целей, планов, закономерностей, языка их представления и др. Она определяет порядок вовлечения <знаний> в процессе принятия решений и их взаимосвязи. Тем не менее конкретное использование <знаний> остается вне такого описания. Оно рассматривается нами частично в [96] и главе 6. Отметим также, что поскольку шахматы принадлежат классу исчислений общего типа [63], то, вообще говоря, рассмотренный выше алгоритм следует отнести к классу алгоритмов поиска вывода. При этом компоненты алгоритма интерпретируются следующим образом. Закономерности, хранимые в тезаурусе,—как упорядоченное множество правил вывода разной степени детерминированности. По заданной позиции запроса P—теореме, алгоритм выделяет из применимых к P правил тезауруса правило A, которое наиболее релевантно, выигрышно и реализуемо по возможности одновременно. Если в следствии A указано конкретное детерминированное и достаточно выигрышное действие—$\langle P,F,l \rangle$- стратегия, то оно выполняется. В противном случае проводится синтез $\langle P,F,l \rangle$-стратегии—поиск вывода F из P, который в данном алгоритме состоит из этапов стратегического, тактического планирования и непосредственного поиска стратегий. Стратегическое

планирование является поиском вывода с использованием мощных допустимых правил в соответствии с θ_2 или θ_3, но быть может недетерминированных. При тактическом планировании выводится одна из целей стратегического плана посредством более детерминированных и менее мощных правил. И, наконец, при непосредственном синтезе $\langle P,E,l \rangle$--стратегий, где Е—последняя недостигнутая еще цель тактического плана, наряду с правилами предыдущих типов, используются правила, порожденные деревом игры. Последний из указанных выводов является наиболее конструктивным.

Глава 6

К ЭКСПЕРИМЕНТАМ КОМБИНАТОРНОЙ АДАПТАЦИИ. ВОПРОСЫ ПРИЛОЖЕНИЙ

§ 1. Пакеты прикладных программ АКА1 и АКА2

1. Проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ (ППП) АКА1 и АКА2 предназначены для исследований с помощью ЭВМ «Минск-32» и серии ЕС соответственно возможностей доказательства либо опровержения гипотез, связанных с адаптацией комбинаторных алгоритмов управления.

Комплектация программами указанных пакетов имела целью обеспечение исследований по схеме 2, приведенной в § 2.4, т. е. обеспечение возможности доказательства (опровержения) гипотез по АКА управления для проблемы-посредника с последующим их обобщением на проблемы класса, представленного этим посредником. Некоторые вопросы, связанные с переносом результатов исследований с проблем-посредников на другие, подобные им в заданном смысле проблемы, будут рассмотрены в § 4.6.

В пакетах АКА1 и 2 в качестве проблемы-посредника выбрана шахматная—ПОУ^{ш}.

Основная часть реализованных программ относится к телу пакета и имеет простую организационную структуру типа библиотеки программ [120]. Любая последовательность программ задается оператором и выполняется операционной системой ЭВМ без внутреннего самоуправления и самообслуживания.

Программы пакета АКА1 оформлены в соответствии с основными положениями инструкции Государственного фонда алгоритмов и программ и использовались в ряде экспериментов по извлечению и внедрению опыта ранее сыгранных шахматных партий во вновь синтезируемые стратегии, в частности, формированию образов позиций и стратегий на основе партий с комментариями, сыгранных шахматными мастерами, их использованию в процессе игры, вычислению правдоподобия целей и др.

Указанные эксперименты были проведены, в основном, на базе АКА1. Однако дальнейшее усовершенствование пакета АКА1 приостановлено в основном из-за недостаточной скорости единичных экспе-

риментов на «Минск-32». В настоящее время разрабатывается только пакет АКА2. При этом, поскольку пакет предназначен для исследовательских работ, в которых построение тех или иных последовательностей программ является нестандартной, творческой операцией и предполагается обязательное участие в вычислениях высококвалифицированного пользователя, выбор структуры пакета в форме библиотеки достаточно оправдан и его развитие целесообразно ограничить структурой, использующей специализированный язык [120].

Программы пакетов АКА1 и 2 можно разбить на следующие классы:

I. Программы и массивы данных АПУ;

II. Программы преобразования АПУ;

III. Программы оценки эффективности АПУ;

IV. Вспомогательные программы.

Последние используются для проверки работоспособности и технического построения комплексных программ, а также обслуживания пакета в целом.

Прежде чем перечислить алгоритмы и программы, разработанные по каждому из указанных классов, поясним смысл используемых терминов и сокращений.

«Информатор»—шахматный ежегодник, издаваемый в Югославии и включающий избранные партии.

Комментарии к партии—суждения, расчеты, эмоциональная оценка шахматистом полуходов, а также других частей заданной партии.

Шахматная партия из «Информатора»—запись шахматной партии с комментариями, а также информации о типе дебюта, фамилиях игроков, результате игры, месте и времени игры, фамилии комментатора, источнике информации.

Заголовок к шахматной партии—информация, в основном внешняя к содержанию партии (фамилии игроков, результат, место и время игры), а также тип дебюта по классификации Рабара.

Предкодированная шахматная партия (из «Информатора»)—шахматная партия (из «Информатора»), переписанная в алфавите заданного перфорационного устройства и отпечатанная на перфораторе.

Шахматная нотация—система обозначений для краткой записи шахматной партии, используемая шахматистами.

Запись шахматной партии—шахматная партия, описанная посредством знаков шахматной нотации.

Посткодированная партия или *комментарии к партии*—шахматная партия или комментарии, представленные в виде, удобном для быстрого проигрывания в ЭВМ.

Каталог—система всех заголовков партий.

Фонд предкодированных (посткодированных) партий (ФОНД1 и ФОНД2 соответственно)—система всех пред(пост)кодированных партий.

Бланк каталога—специальная форма для записи информации,

составляющей содержание одного заголовка и связей заголовка с другими частями системы.

Бланки фондов посткодированных партий и *комментариев* определяются аналогично.

Элемент «Каталога»—заполненный бланк каталога. Аналогично определяются *элементы фондов партий* и комментариев.

Дополнительный комментарий к партии—информация о партии, накопленная в процессе работы системы.

Сокращения $ОП_i$ и $ОС_i$ $i=1,2,...$, означают i-ый тип гипотез об образах позиций и стратегий, РР—разработано и реализовано, Ра—разработано.

2. Пакет АКА1 включает описания следующих алгоритмов, программ для ЭВМ и массивов (соответствующие компоненты АКА2 отмечены *).

1 класс: 1.* (РР) фонды из 700 партий «Информатора» пред- и посткодированных партий;

2. (РР) фонды из шахматных дескрипторов, в том числе 244 элементарных; схемы правдоподобия девяти целей, представленные в форме справочной схем;

3. (РР) программа вычисления правдоподобия целей;

4. (РР) программы восприятия и действия, связанные с вводом шахматных текстов и запросов, выводом на печать, выполнением хода и др.;

5. (РР) программы поиска в фондах поисковых образов $ОП_i$ $i=1,2,3$, в единичном и пакетном режимах с длиной пакета запросов не более 20 позиций;

6. (Ра) программа поиска в каталоге партий;

7. (РР) АПУ f_0^1, основанный на упорядочении по заданным критериям всех ходов из анализируемой позиции и оценке оптимальности этих ходов посредством сравнения частот выигрышности тех партий, в которых соответствующие позиции ранее встречались; в случае отсутствия таких партий выбирается ход согласно упорядочению;

8. (РР) АПУ f_0^2, основанный на выборе максимально релевантных по заданному критерию 1 образов позиций и соответствующих им образов стратегий с последующим выбором конкретного хода по критерию 2; если указанная попытка не приводит к успеху, делается ход согласно заданному упорядочению ходов;

9*. (Ра) АПУ f_0^3 (точнее, алгоритм поиска стратегий), основанный на идее построения планов, ведущих к заданной цели, и поиска путей их осуществления (модифицированный алгоритм поиска комбинаций Ж. Питра [161]);

10. В дополнение к фонду п. 2 построен толковый словарь примерно 200 шахматных понятий.

II класс: 1. (РР) программа формирования фонда посткодированных партий из «Информатора»;

2. (РР) программа формирования фонда образов позиций ОП2 посредством описания состава и числа фигур позиций;

3. (РР) программа формирования фонда образов позиций ОП3 посредством указания индексов тех целей из заданного списка, правдоподобие которых превышает $m_1 z(q', P)$, где q'—цель в позиции P с максимальным значением правдоподобия, равным $z(q', P)$, $0 < m_1 \leqslant 1$;

4. (Ра) аналогична (3), но исходный список целей определяется разложением максимально правдоподобной цели на подцели (ОП4);

5. (РР) программа анализа и разложения предкодированных партий на партии и комментарии;

6. (Ра) алгоритм анализа комментариев и их посткодирования;

7. (Ра) алгоритм формирования и структурирования каталога;

8. (РР) программы анализа предкодированных партий, их посткодирования и формирования соответствующего фонда;

9. (РР) программы формирования образов стратегий при $ОП_i$, $i = 1,2,3$, посредством выделения всех ходов из позиций, описываемых $ПП_i$.

10. (РР) программа формирования справочной схем правдоподобия.

III класс: Предполагается, что программы по организации турнира выбора тестовых и сбалансированных позиций, анализа его результатов, а также программы для оперативных наблюдений над турниром вырабатываются экспериментатором для каждого конкретного эксперимента индивидуально, в соответствии с теоремой 1 §5.4 и ее следствиями.

IV класс: 1. (РР) программы перемещения и очистки фондов;

2. (РР) программы исправления ошибок в массивах предкодированных партий и др.

Суммарный объем реализованных на «Минск-32» программ составляет 25 000 операторов, в том числе 13 000 на «Фортране» и 12 000 на ЯСК. Объем фонда из 700 предкодированных партий составляет 400 000 символов «Информатора».

Объем программ, реализованных на ЕС-1030, составляет 5 000 операторов, в том числе 3 000 на «Фортране» и 2 000 на *PL*/1.

Описание АКА 1и 2 приведено частично в отчетах ВЦ АН АрмССР [95, 96]. Полное описание будет подготовлено к отдельной публикации.

Перейдем к описанию экспериментов на основе пакета АКА1.

§ 2. Эксперименты вычисления правдоподобия целей

1. Рассмотрим результаты экспериментального исследования возможности распознавания наиболее правдоподобных в анализируемых ситуациях целей из заданного списка целей посредством *алгоритмов вычисления правдоподобия целей* (АПЦ), описанного в § 5.5.

Прежде чем перейти к описанию программной реализации АПЦ и результатов экспериментов, отметим, что предлагаемый алгоритм применим к вычислению правдоподобия, вообще говоря, произвольных описаний.

2. В § 5.5. значение полного правдоподобия $z(F, P)$ предлагалось получить на основе анализа $z^3(F, P)$ и $z^4(F, P)$. В реализованном в настоящее время АПЦ значение $z(F, P)$ вычисляется на основе графа и/или, полученного совмещением графов θ_3^* и θ_4^* с соответствующим пересчетом весов, пополнением этого графа указателями приоритета при вычислении компонент конъюнкций, а также, быть может, некоторыми дескрипторами, не рассматриваемыми в графах θ_3^* и θ_4^*. Программа для АПЦ является системой сравнительно автономных подпрограмм, работа каждой из которых связана, в основном, с одной конкретной целью из списка целей. Поэтому описание АПЦ представлено посредством следующих компонент:

1. Описания *схем вычисления правдоподобия целей* с номерами $i=1, \ldots, N_1$ (СП целей) и *общих частей СП целей* (СП-j, $j=1, \ldots, N_2$);

2. Описания структуры данных СП целей и их организации в памяти машины;

3. Описания работы АПЦ для конкретной цели;

4. Списка элементарных дескрипторов, используемых в СП целей.

При этом описание вышеуказанного совмещенного графа является составной частью описания СП целей.

Полное описание указанных компонент дано в [96]. Здесь же оно будет приведено по мере необходимости объяснения результатов экспериментов.

3. Схема вычисления правдоподобия цели i (СП цели i) является составной частью описания работы АПЦ для конкретной цели с номером i.

Формально СП цели i есть взвешенный граф и/или, концевые вершины которого являются либо номерами дескрипторов атомарных формул со знаком * или без него, либо указателями подсхем общих частей СП целей.

Указатели обозначают конкретные, часто повторяющиеся части СП целей. Их описания аналогичны описаниям СП целей и включены в их список. Знак * используется только для элементарных дескрипторов, соединенных знаком &, и означает, что значение дескриптора со знаком * вычисляется первоочередно, а при равенстве его нулю другие элементарные дескрипторы конъюнкции не рассматриваются, а сама конъюнкция приравнивается нулю.

Структура и веса в схеме цели i получаются на основе графов θ_3^*, θ_4^* и в данной реализации АПЦ отражают шахматный опыт экспериментаторов.

Вычисление правдоподобия $z(F, P)$ по конкретной СП цели проводится так же, как и рассмотренное в § 5.5 вычисление $z^3(F, P)$.

Ясно, что от графа и/или СП цели i можно перейти к эквивалентной формуле языка I порядка.

Если в СП целей заменить все указатели соответствующими схемами, то все концевые вершины этих схем будут, вообще говоря, дескрипторами атомарных формул вида $p_n(a_1, \ldots, a_n)$, где p_n—n-местный предикатный символ, $a_1, \ldots, a_n$—термы.

Если терм a имеет вид $f(x_1, \ldots, x_m)$, где f—функциональный символ, а x_i—переменная индивидов определенного типа, то распознавание принадлежности индивидов к этому типу производится посредством специально предусмотренных для этой цели предикатов. Тем самым применению каждой функции к индивидам предшествует акт их распознавания в множестве индивидов. Из сказанного следует, что в описании СП цели i простое перечисление включенных в схему элементарных дескрипторов недостаточно, а наряду с ним должны быть указаны используемые в этих дескрипторах распознаватели индивидов и преобразующие их функции.

Приведем описание некоторых из 36 рассмотренных нами СП целей, из которых 9 были реализованы как «Фортран»-программы.

СП целей № 1—6 относятся к понятию связанной фигуры, а точнее, к понятию «Фигура противника x, стоящая на клетке (p, q), связана», где x—слон (1), ладья (2), конь (3), ферзь (4), пешка (5) или король (6).

Фигура x считается связанной, если она атакована фигурой противника, и уход ее с занимаемого ею поля ставит под удар незащищенную или более ценную, чем атакующая, фигуру. Естественно, при условии, что очередной ход принадлежит противнику, король в подобной ситуации оказаться не может. Однако возможность появления короля в указанном положении (со своим ходом) должна учитываться.

№ 7: изолированная пешка, стоящая на клетке (p, q), находится на открытой линии.

Линия, на которой находится пешка, считается открытой, если на ней нет других фигур (своих или противника). Пешка называется изолированной, если на соседних с этой клеткой вертикалях нет пешек того же цвета.

№ 11: пешки вне атаки слона противника, стоящего на клетке (p, q).

Указанная цель имеет у нас смысл, если на доске имеется не менее трех своих пешек. В этом случае пешки находятся вне атаки слона противника, если цвет клеток, на которых стоят пешки, отличен от цвета клетки, на которой стоит слон противника.

№ 18: возможность пешечного прорыва на фланге x, где x—левый или правый.

Пешечный прорыв на фланге x считается возможным, если количество пешек противника на указанном фланге хотя бы на одну меньше, чем количество пешек игрока, и у него на указанном фланге нет сдвоенных пешек.

СП целей № 32—36 относятся к понятию развитой фигуры, а точнее, к понятию «Фигура x, стоящая на клетке (p, q), развита», где x—ферзь (32), ладья (33), конь (34), слон (35) или пешка (36).

Фигура (не пешка) считается развитой, если она не стоит на своем исходном месте и является подвижной.

Пешка считается развитой, если выполняется одно из указанных ниже условий:

а) пешка защищает свою фигуру, которая атакована не менее чем одной фигурой противника,

б) пешка имеет возможность нанесения двойного удара,

в) пешка проходная и находится выше (ниже) четвертой (пятой) горизонтали, если пешка—белая (черная).

Нами выделены, в частности, следующие общие части СП целей (для различения номеров общих частей СП целей от номеров самих СП целей номера общих частей увеличены на 1000):

СП № 1001—1008: „Фигура противника типа z связана по линии типа L фигурой игрока типа x".

СП № 1009—1010: „Возможность хода с клетки (x, y) на (z, u) без угрозы взятия противником на (z, u)".

СП № 1011: „Возможность хода пешкой с клетки (p, q) на (r, s) без угрозы взятия противником на (r, s). (Клетка (r, s) не занята противником)".

Приведенные СП целей относятся к сравнительно простым, из рассмотренных нами. Представление о сложности других более интересных с шахматной точки зрения целей можно получить из СП «двойной удар», число элементов и средняя глубина которой почти вдвое превышает СП «связка» и равны соответственно 360 и 14. При этом более сложные цели, как правило, включают в себя более простые. Последнее обстоятельство в значительной мере определило список целей, доступных для наших экспериментов по вычислению правдоподобия целей.

4. В рассматриваемой серии экспериментов эффективность работы АПЦ исследовалась посредством сравнения оценок правдоподобия заданных целей, построенных алгоритмом для тестовых позиций, с аналогичными оценками экспериментаторов.

Эксперименты проводились на базе пакета АКА1 для тестовых позиций, специально подобранных для каждой цели, либо выбранных случайным образом из «Информатора».

Ниже приведены примеры экспериментального вычисления правдоподобия целей № 2,3,7,11. Правдоподобия целей вычислены для каждой из фигур, к которой эти цели применимы, отдельно для белых и черных фигур. Окончательное значение правдоподобия выбиралось по ее максимальному значению по всем фигурам одного и того же цвета.

Примеры.

Цель № 2: ладья противника связана. Позиция: Бел. *Крg*1, *Лf*1,

*Ca*4, *Ce*5, *Kc*6, *a*3, *b*2, *c*3, *f*2, *g*4, *h*4. Чер. *Kpg*7, Л*a*7, Л*b*5, Л*f*6, *Ke*8, *a*5, *b*6, *c*5, *f*7, *g*6, *h*6.

Правдоподобие для белых: *a*7—0,1; *b*5—0,91; *f*6—1,0.

Цель № 3: конь противника связан. Позиция: Бел. *Kpg*2, Л*e*1, Л*f*1, *Ca*2, *Cd*2, *Kf*3, *a*3, *b*4, *c*3, *f*2, *g*4, *h*3. Чер. *Kpa*8, Ф*g*8, Л*d*8, *Kb*7, *Kf*6, *a*7, *b*6, *c*5, *e*6, *f*5, *h*7.

Правдоподобие для белых: *b*7—0,4; *f*6—0,91 (для черных: *f*3—0,27).

Цель № 7: изолированная пешка находится на открытой линии. Позиция: Бел. *Kpg*3, *Ce*2, *Ka*3, *a*5, *c*3, *e*4, *g*4, *h*3. Чер. *Kpg*7, *Cb*7, *Ke*7, *b*5, *e*6, *f*7, *g*6.

Правдоподобие для белых: *a*5—0,8; *c*3—1,0; *e*4—0,8; *g*4—0,2; *h*3—0,4 (для черных: *b*5—1,0; *e*6—0,2; *f*7—0,4; *g*6—0,2).

Цель 11: пешки вне атаки слона противника.

Позиция: Бел. *Kpg*2, Л*e*2, *Cd*3, *Ce*3, *f*3, *g*3, *h*3. Чер. *Kph*7, Л*g*8, *Cb*6, *Cd*7, *e*5, *f*6, *g*5, *h*6.

Правдоподобие для белых: *b*6—1,0; *d*7—0,51 (для черных: *d*3—1,0; *e*3—0,51).

Каждая из указанных целей исследовалась в среднем на 10 тестовых позициях. Сравнение полученных оценок с экспертными показывает, что предложенный алгоритм достаточно эффективен и принципиально может быть использован при вычислениях правдоподобия целей в алгоритмах поиска управлений. Ясно, что окончательные оценки АПЦ будут получены после его испытаний в комплексе с другими компонентами алгоритма поиска управлений.

Отметим, что в процессе поиска адекватного режима работы АПЦ нами использовалась ручная настройка весов и порогов, что является примером неалгоритмической параметрической регуляризации. В дальнейшем представляется интерес алгоритмизация этой настройки. Полезными при этом могут оказаться аналогии с известными процедурами настройки весов для пороговых функций, в частности персептронов.

Заметим также, что, рассматривая описания типа $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{r} z(F_i, P) \geqslant \rho_i$ как гипотезу об образе позиции P, настройку весов в АПЦ можно классифицировать как процедуру адаптации образа позиций.

§ 3. Эксперименты формирования закономерностей типа «правдоподобные цели ⇒ рекомендуемые решения»

1. В данном параграфе рассмотрены мотивы выбора закономерностей типа 6, или $\mathcal{R}_6$, определенных в § 6.5, а также приведены результаты экспериментов по их формированию [95].

2. Закономерности $\mathcal{R}_0$—$\mathcal{R}_7$ лишь по предположению способны к усилению алгоритмов управления. Приведет ли их использование к реальному усилению зависит, в частности, от следующих факторов:

1. Является ли закономерность детерминированной или нет;

2. Насколько эффективны рекомендуемые закономерностью управления (какие цели они способны обеспечить, как эти цели связаны с ранее достигнутыми или намеченными, в какой мере они связаны с глобальными целями и др.);

3. Как быстро данная закономерность может быть обнаружена в тезаурусе;

4. Допускает ли алгоритм управления использование закономерностей заданного типа и др.

Установление индивидуальных связей каждого из указанных факторов с усилением алгоритмов представляет большие трудности и эти связи в настоящее время выявляются нами только интегрально, в основном посредством турниров (см. § 5.4). Поэтому указанные факторы следует рассматривать как некоторые предпосылки или мотивы к возможному усилению посредством закономерностей, для которых они выполнены.

Проведем сравнительный анализ степени выполнения факторов типов 1 и 2 для закономерностей $\mathcal{R}_6$ относительно закономерностей $\mathcal{R}_0$. Выбор последних обусловлен тем, что $\mathcal{R}_0$ в наибольшей степени отвечают нашим априорным представлениям о записях типов $\mathcal{R}_0$–$\mathcal{R}_7$, способных к усилению.

Закономерности типа $\mathcal{R}_0$ являются детерминированными. В распознавателе $\mathcal{R}_0$ по существу указываются необходимые и достаточные условия, выполнение которых в заданной позиции x гарантирует построение $\langle x, F\rangle$-стратегии. При этом $\langle x, F\rangle$-стратегии определяются для каждой позиции x, отобранной распознавателем, и задают в явном виде причинно-следственную связь между условиями распознавателя и следствием — некоторым способом достижения цели F.

Закономерности типа $\mathcal{R}_6$ имеют следующий вид: $u_6 \Rightarrow v_6$, где $u_6 = x \in T_m$, $v_6 = \exists y(y \in T_m \cap I_r \& x \in f_1(y) \& c_x \in f_2(c_y))$, $T_m = \{x | \&_{i=1}^{m} z(x, F_{i_j}) \geqslant \rho_{i_j}\}$, $1 \leqslant m \leqslant r$; $F_1, \ldots, F_r$—список целей, $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}\} \subseteq \{F_1, \ldots, F_r\}$; I_r— некоторое множество позиций с известным в каждом из них y первым ходом c_y некоторой $\langle y, F\rangle$-стратегии, $F \in \{F_1, \ldots, F_r\}$; f_1 и f_2— функции, преобразующие позиции в множества позиций и ходы в множества ходов; c_x — ход в позиции x, вычисленный посредством f_2 по известному ходу c_y.

Ясно, что выполнение условий распознавателя $\mathcal{R}_6$ для заданной позиции x не гарантирует вычисления (в соответствии со следствием $\mathcal{R}_6$) некоторого хода c_x, поскольку эта возможность зависит от конкретного выбора I_r, f_1 и f_2. Поэтому $\mathcal{R}_6$, в общем случае, не является детерминированной.

Рассмотрим случай, когда ход c_x вычислен, т. е. все условия следствия $\mathcal{R}_6$ выполнены. Возникает вопрос о связи c_x с возможностью достижения целей $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$. Ясно, что ответ на него определяется строением функций f_1 и f_2, а также связями c_y с $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$.

По определению I_r, из $y \in I_r$ следует, что существует $\langle y, F \rangle$-стратегия при $F \in \{F_1, \ldots, F_r\}$. Если же $y \in T_m \cap I_r$, то предполагается, что область принадлежности F значительно сужается, т. е. $F \in \{F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}\}$ и $m \leqslant r$. Основанием для такого предположения служит факт выполнения условия $\mathop{\&}\limits_{j=1}^{m} z(F_{i_j}, y) \geqslant \rho_{i_j}$, которое в определенной степени связано с наличием в y одной из $\langle y, F_{i_j} \rangle$-стратегий. По существу неравенство $z(F, y) \geqslant \rho$ говорит о том, что цель F, для которой нам хотелось бы построить $\langle y, F \rangle$-стратегию, в y достигнута соответственно значению $z(F, y)$. Если непосредственное указание $\langle y, F \rangle$-стратегии дает полное обоснование достижимости F в y, то вычисление правдоподобия F в y дает некоторую оценку этой достижимости в рамках рассматриваемого языка. Таким образом предполагается, что из $y \in T_m \cap I_r$ следует принадлежность c_y к первому ходу одной из $\langle y, F \rangle$-стратегий при $F \in \{F_{i_1}, \ldots F_{i_m}\}$ и $m \leqslant r$. Тогда при соответствующих требованиях к выбору функций f_1 и f_2 можно полагать, что c_x также будет направлен к достижению одной из целей $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$. Эти требования для f_1 могут быть следующими:

1. f_1 производит общие преобразования позиции y, сохраняющие возможность достижения в $f_1(y)$ каждой из целей, достижимых в y, и в той же мере, что и в y;

2. f_1 производит локальные преобразования позиции y, сохраняющие указанные в п.1 возможности только для заданного списка целей.

К преобразованиям общего типа относятся, в частности, симметричное относительно вертикальной или горизонтальной осей симметрии преобразование шахматной доски и полное изменение цвета фигур на противоположные.

К элементам локальных преобразований можно отнести, к примеру, такие, которые сохраняют возможность некоторого конкретного перемещения на доске, сохраняют состав фигур, либо обеспечивают вхождение состава y в $f_1(y)$ (или наоборот), сохраняют y как фрагмент $f_1(y)$ (или наоборот), в частности возможность получения y из $f_1(y)$ исключением из $f_1(y)$ некоторых фигур, и др.

Заметим, что общие преобразования можно рассматривать как разновидность локальных. Однако такое разделение нам удобно для анализа.

Требования к f_2 являются производными от конкретного выбора f_1 и дополняют его. Если f_1 сохраняет возможность достижения в $f_1(y)$ тех же целей, что и в y, то f_2 указывает на конкретный ход, ведущий к ним, вычисленный на основе c_y. Элементами f_2 могут быть преобразования координат клеток доски, связанных с c_y, процедуры выбора ходов из заданного списка возможных на основе специального анализа позиции $f_1(y)$ и c_y, (например, использующие отбрасывание ходов, приводящих к отрицательному материальному балансу или не обеспечивающих защиту от наличного шаха, и др.).

Перейдем к непосредственному описанию результатов экспериментов по формированию $\mathcal{R}_6$ [96].

3. В проведенных к настоящему времени экспериментах на базе пакета АКА1 параметры $\mathcal{R}_6$ были конкретизированы следующим образом.

В список целей были включены 9 целей: $F_1,\ldots,F_6$—слон (1), ладья (2), конь (3), ферзь (4), пешка (5), король (6) соответственно, связаны, F_7—изолированная пешка на открытой линии, F_8—пешки вне атаки слона, F_9—возможность пешечного прорыва.

Соответствующие пороги имели значения: $\rho_1,\ldots,\rho_6$—0,9; $\rho_7,\ldots,\rho_9$—1,0.

Примеры работы схем вычисления правдоподобия указанных целей были приведены в § 3.

В множество I_r были включены 200 позиций из 10 первых партий шахматного сборника «Информатор», № 12, 1972 г. Из каждой партии выделялись 20 подряд идущих позиций начиная с 11 хода. Одновременно запоминался ход, сделанный в каждой из этих позиций. Указанный выбор можества I_r по существу предполагает принятие гипотезы о том, что решения, принятые мастерами в выделенных позициях, направлены к достижению одной из целей заданного списка и являются наилучшими. При достаточно богатом списке целей данное предположение представляется разумным, поскольку цели-намерения шахматистов-мастеров находятся в достаточно полном соответствии с единицами шахматного языка, описывающими их.

В экспериментах рассматривались только такие функции типа f_1, которые порождают позиции или классы позиций посредством локальных преобразований, поскольку возможности известных общих преобразований (безусловно полезных при построении $\mathcal{R}_6$) нетрудно получить чисто аналитически.

Исследовались следующие функции типа f_1:

1. $f_1^1(y)\equiv y$;

2. $f_1^2(y)$ состоит из позиций, геометрически содержащихся в y;

3. $f_1^3(y)$ состоит из позиций, каждая из которых геометрически содержит y;

4. Набор всех фигур каждой позиции из $f_4^1(y)$ содержит набор фигур y;

5. Набор всех фигур каждой позиции $f_1^5(y)$ содержится в наборе фигур y.

В множество ходов $f_2(c_y)$ были включены ходы такие, что каждый из них c_x совпадал с c_y по произведенному на доске физическому перемещению, т. е. по ходящей фигуре, ее начальным и конечным координатам, и одновременно удовлетворял следующим требованиям:

1) если ходит король, то он не должен попасть под шах;

2) правила игры при ходе c_x не должны быть нарушены;

3) c_x не открывает шаха королю;

4) если c_x является взятием и конечная клетка c_y под ударом, проверяется положительность окончательного материального баланса.

Заметим, что поскольку описание хода есть описание пары позиций — исходной и конечной, то определения f_1 и f_2 в определенной мере могут пересекаться, так как f_1 характеризует только исходные позиции, а f_2—обе. Поэтому функция f_2 в экспериментах относилась к типу f_1 (функция f_1^6) и вычислялась одновременно с каждой из функций f_1^1—f_1^5.

Из вышеизложенного видно, что эксперименты проводились при ряде ограничений, в том числе:

1) малое число испытуемых целей и недостаточное их разнообразие;

2) недостаточная обоснованность состава использованных целей с позиций шахматистов;

3) малая мощность множества I_r.

Первые два ограничения явились следствием больших трудностей, связанных с формализацией и программной реализацией достаточно интересных шахматных целей. Представление об их сложности дает схема правдоподобия связки (порядка 200 элементов), которая является одной из компонент действительно интересных целей. По существу в список $F_1, \ldots, F_9$ попали те компоненты синтезируемых нами целей, которые в настоящее время удалось реализовать.

Малая мощность множества I_r объясняется большими затратами машинного времени при формировании ОПЗ на базе ЭВМ «Минск-32». В наших экспериментах ОПЗ для одной позиции занимало около 1,5 мин, а весь массив ОПЗ для 200 позиций строился более 4 часов.

Ясно, что указанные ограничения устранимы либо сразу при переходе к пакету АКА2, либо по мере его развития.

4. Формирование $\mathcal{R}_6$ в экспериментах проводилось в следующей последовательности.

1. Для каждой позиции y из I_r строилось описание типа 3 (ОПЗ), имеющее вид двух наборов двоичных слов, в первом из которых „1" в i-ом разряде означала, что $z(y, F_i) \geqslant \rho_i$ для белых, а во втором наборе аналогично для черных.

2. По заданной позиции запроса x строилось ОПЗ для x, после чего на основе массива ОПЗ, построенного для I_r, выделялись все позиции из I_r, совпадающие с x по первому или по обоим наборам ОПЗ, т. е. формировалось множество $T_m \cap I_r$, описанное во втором разделе данного параграфа.

3. В соответствии с каждой из функций f_1^i, $i=1, \ldots, 6$, выводились на печать все те позиции y из $T_m \cap I_r$, для каждой из которых $x \in f_2^i(y)$, и одновременно печатались соответствующие ходы c_y. (Напомним ,что f_1^6 вычислялась вместе с каждым из $f_1^1, \ldots, f_1^5$.)

Из вышесказанного видно, что по заданной позиции x сразу проверяется условие $\exists y\ (y \in T_m \cap I_r)$, причем само множество $T_m \cap I_r$ формируется по запросу x после вычисления ОПЗ для x. Данная форма хранения $\mathcal{R}_6$ была выбрана с целью по возможности

ускорить формирование множества $T_m \cap I_r$ при разных наборах $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$.

Ниже приведены примеры из распечаток следствий закономерностей типа 6 при разных позициях запросов. Каждый пример состоит из позиций запроса x и множества $T_m \cap I_r$, для каждой из которых y выполнено условие $x \in f_i^1(y)$, при $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ (критерий типа i). Запись „И 12 № α, ход β белых" означает, что позиция взята из партии № α „Информатора" № 12 при ходе № β белых.

Примеры.

1. Позиция *запроса*, партия И 12 № 238, ход 14 белых:

Бел. *Крg*1, *Ла*1, *Лf*1, *Сс*1, *Сd*5, *Кb*1, *а*2, *b*2, *е*5, *f*2, *h*2.

Чер. *Крg*8, *Ла*8, *Лf*8, *Сg*4, *Кс*2, *а*7, *b*7, *с*7, *f*7, *g*7, *h*7.

I набор: 000010000; II набор: 000000001.

Выделенные позиции. Партия И 12 № 1, ход 14 белых *К b*1—*d*2:

Бел. *Кре*1, *Ла*1, *Лh*1, *Се*2, *Кb*1, *а*2, *b*3, *с*2, *f*2, *g*2, *h*2.

Чер. *Крd*8, *Ла*8, *Лh*8, *Сс*8, *Ке*5, *а*7, *b*7, *с*6, *f*7, *g*6, *h*7.

Партия И 12 № 8, ход 12 белых *f*2—*f*4:

Бел. *Кре*1, *Фе*3, *Ла*1, *Лh*1, *Сf*1, *Сb*2, *Кс*3, *а*2, *b*3, *с*2, *е*5, *f*2, *g*3, *h*2.

Чер. *Кре*8, *Фd*8, *Ла*8, *Лh*8, *Сс*8, *Сg*7, *Ке*6, *а*7, *b*7, *d*6, *е*7, *f*7, *g*6, *h*7.

2. Позиция *запроса*, партия И12 № 123, ход 26 черных: Бел. *Кре*2, *Ла*1, *Лd*1, *Сс*3, *а*4, *с*2, *с*5, *d*4, *f*2, *g*4, *h*5. Чер. *Крd*7, *Ла*8, *Лh*8, *Кс*4, *а*7, *b*6, *с*6, *е*6, *f*6, *g*7, *h*6.

I набор: 000000001; II набор: 000000000.

Выделенные позиции. Партия И 12 № 9, ход 18 черных: *Лh*8–*g*8:

Бел. *Крg*1, *Фd*2, *Ле*1, *Лf*1, *Сg*2, *Сh*6, *а*2, *b*2, *d*3, *d*5, *g*3, *h*2.

Чер. *Кре*8, *Фd*8, *Ла*8, *Лh*8, *Се*7, *Ке*5, *а*7, *b*6, *d*4, *d*6, *f*7, *g*6, *h*7.

Партия И 12 № 10, ход 13 черных *Ла*8—*d*8:

Бел. *Крg*1, *Фd*1, *Ла*1, *Ле*1, *Сс*1, *Сg*2, *Кс*4, *Кg*5, *а*4, *b*2, *с*3, *d*3, *f*2, *g*3, *h*2.

Чер. *Крg*8, *Фс*7, *Ла*8, *Лf*8, *Сb*7, *Сg*7, *Кс*6, *Кd*5, *а*7, *b*6, *с*5, *е*6, *f*7, *g*6, *h*7.

Все позиции выделены по критерию 6 при совпадении только по I набору.

Анализ экспериментальных данных показывает, что синтезированные закономерности типа $\mathcal{R}_6$, несмотря на ряд довольно существенных ограничений на условия проведения экспериментов, оказались достаточно осмысленными, чтобы считать их исследование в алгоритмах управления обоснованным. Приведет ли оно к усилению алгоритмов, может показать лишь комплексная оценка этих закономерностей во взаимодействии с другими компонентами алгоритмов. В настоящее время исследования возможностей формирования $\mathcal{R}_6$ с учетом перечисленных выше ограничений продолжаются на базе пакета АКА2.

§ 4. Сравнение эффективности систем управления методом турниров

1. Известно, что критерии оптимальности, вопросы контроля, эффективности той или иной информационной системы и отдельных ее

частей можно определить только исходя из общих критериев оптимальности конкретно решаемой проблемы.

Так в работе [132] справедливо отмечено, что доброкачественность оценки ИПС «...определяется той задачей, для которой мы хотим использовать поисковую систему и теми условиями, в которых мы ее используем. ...Несмотря на кажущуюся очевидность этого утверждения, никто из известных нам исследователей, занимающихся проблемой оценок поисковых систем, не делает из этого достаточных выводов. Это проявляется в том, что никто из них не считает нужным действительно связывать вводимые ими формальные оценки с какими-либо определенными условиями их применения».

Указанные критерии оценки, которые мы будем называть *глобальными,* для ПОУ могут быть уточнены следующим образом.

Каждый оператор качества АПУ определяет соответствующее понятие оптимальности решений. Так, соответственно критериям $\pi(\sigma)$-сложности или СКС, определенным в главе I, можно говорить об оптимальных по этим критериям АПУ. В другой конкретизации, пусть H—некоторое множество начальных ситуаций, называемых тестовыми и g — некоторый фиксированный алгоритм поиска возмущений.

АПУ f назовем $\langle H, g\rangle$-оптимальным в $\mathcal{M}$-ситуации Г, если f при заданном порядке воздействия управлений и возмущений приводит к какой-либо выигрышной ситуации из большинства тестовых ситуаций H. При этом термин «большинство» может быть уточнен так же, как в [21].

Глобальными оценками (г.о.) заданного АПУ назовем каждый из типов оптимальности, достичь которых способен f.

Г.о. характеризуют эффективность выбранного АПУ в целом, комплексно. Однако, рассматривая АПУ как результат координированной работы компонент системы управления, в частности, тезауруса алгоритмов поиска, анализаторов и др., г.о. можно использовать для сравнения и последующей оценки указанных компонент в отдельности. С этой целью необходимо получить г.о. АПУ, порожденных из заданной АПУ посредством последовательной подстановки в систему всех испытуемых вариантов функционально однотипных компонент (например алгоритмов поиска). При этом должны быть приняты меры, чтобы остальные компоненты системы, используемые при синтезе исследуемой стратегии, оставались бы неизменными.

Г. о., полученные указанным способом, будут характеризовать степень эффективности испытуемых компонент АПУ при решении рассматриваемой ПОУ. Используя частичную упорядоченность г.о., можно поставить вопрос о выборе оптимального варианта испытуемой компоненты. Из определения г.о. следует, что в исследованиях, связанных с ними, необходима полная контролируемость решаемой ПОУ или адекватной ей модели. В некоторых реальных экспериментах полный или почти полный контроль обеспечить удается. Так происходит, например, во многих биологических, психологических экспе-

риментах, модельных испытаниях технических систем, при приеме экзаменов у студентов и др. Однако, в общем случае, вычисление г.о. и оценка эффективности компонент АПУ на их основе сопряжены с большими трудностями, в частности, по следующим причинам.

1. ПОУ не контролируема исследователем как целостная система. Например, ему могут быть неизвестны множество возможных возмущений или допустимые последовательности управлений и возмущений.

2. Исследователь может быть лишен возможности воспроизводить процесс решения ПОУ или отдельных его этапов. Это может быть связано как с необратимостью или неконтролируемостью отдельных элементов, связанных с решением ПОУ, так и с величиной требуемых для проведения экспериментов экономических затрат.

3. Невозможно контролировать идентичность исследуемых АПУ, в частности, из-за отсутствия приемлемых описаний систем управления, специально выделяющих их алгоритмические и информационные структуры, либо из-за слишком сложного характера этих описаний.

4. Компоненты АПУ взаимосвязаны таким образом, что изменение одной из них требует обязательного изменения, подстройки других. Это затрудняет исследование «чистого» влияния таких компонент на г.о.

Указанные трудности иногда бывает возможно обойти, если удается найти критерии, которые позволяют оценивать отдельные элементы АПУ посредством их локального анализа такого, что связь результатов анализа с г.о. известна достаточно определенно.

Например, можно оптимизировать время поиска в тезаурусе при неизменном отношении релевантности так, чтобы улучшались г.о. решаемой ПОУ. Однако, как правило, построение локальных критериев по сложности бывает сравнимо с получением г.о. либо по существу невозможно. Представляется, что известные трудности с формализацией отношений релевантности (смысловой) и пертинентности [69, 131] связаны с отсутствием общих методов перехода от г.о. к локальным. Так, например, понятие «пертинентность» в [131] формулируется следующим образом: пертинентность—соответствие текста (документа, фактографической записи), выданного ИПС в ответ на информационный запрос, фактической информационной потребности того, кто сформулировал этот запрос.

В этом определении трудность не столько в формализации «фактической информационной потребности», сколько в ее непосредственном вычислении. Действительно, пусть в рассматриваемой задаче используется некоторая стратегия f и α—требуемый тип оптимальности при решении Г.

Для заданной ситуации A рассмотрим множество всевозможных ситуаций, получаемых из A как результат применения АПУ f и обозначим через Y_A подмножество всех тех из них, из которых f еще способен достичь оптимальности типа α. Тогда «фактической потребностью» в ситуации A можно считать каждый из элементов множества Z_A, которое может быть извлечено алгоритмами поиска из тезауруса и исполь-

зование элементов которого по АПУ f может привести к одной из ситуаций множества Y_A.

Данное определение «фактической потребности» на наш взгляд достаточно точно отражает содержание указанного понятия в информатике. В то же время оценка качества тезауруса, алгоритма поиска и др. посредством множеств Z_A в общем случае представляется не менее трудным препятствием, чем через вычисление г.о.

Нетрудно видеть, что выполнение требований 2)—8) § 2.4 к проблемам-посредникам в определенной мере позволяет обойти 1—2 типы вышеуказанных трудностей, связанных с определением эффективности испытуемых АПУ и их компонент посредством вычисления г.о. В то же время использование проблем-посредников не снимает вопроса о наличии и конкретной форме «чистого» влияния компонент системы на г.о. Этот вопрос для каждого испытуемого элемента, по-видимому, должен рассматриваться индивидуально.

В последующих разделах данного параграфа рассматривается возможность оптимального выбора информационных структур систем управления общего типа при отсутствии модели решаемой задачи. Для этой цели предлагается использовать модельные проблемы типа игр двух лиц с противоположными интересами и сравнивать структуры посредством противопоставления систем, использующих эти структуры, в форме турниров § 5.4 при условии, что все остальные компоненты исследуемых конфликтующих систем совпадают, а характер испытаний в определенном смысле полон.

Обсуждается связь глобальных оценок, полученных указанным способом, с искомыми и область приложения предлагаемого метода. Описаны также специальные языковые средства, предназначенные для идентификации и сравнения исследуемых информационных структур.

2.1. *Представление систем управления.* Как было отмечено выше, сложность вычисления глобальных оценок информационных структур связана не только с отсутствием моделей, адекватных решаемым проблемам, но также с трудностью идентификации исследуемых систем управления. Нами рассматривается возможность решения этого вопроса, основанная на сравнении алгоритмической и информационной структуры систем. Построение подобных процедур, вообще говоря, осуществимо, поскольку рассматриваемые системы управления и их компоненты (в отличие от решаемых ими проблем) являются искусственными конструкциями, а это дает принципиальную возможность описания указанных структур с любой требуемой степенью детальности.

Мы рассматриваем системы управления, представимые через комплекс программ, массивы данных и высказывания о них, взаимодействие которых организуется программами типа супервизора. Соответствующий язык описания призван отражать наиболее существенные на наш взгляд алгоритмические и информационные характеристики подобных систем.

Требования, которые предъявлены к рассматриваемым нами системам управления, позволяют отнести их к классу роботов. Однако

этот термин обычно ассоциируется с определенным техническим устройством, что здесь неуместно.

Более подходящими являются термины «интеллектоподобная система управления», «квазииндивид», или сокращено «кинд». Мы выбрали последний термин и снабдили его порядковым номером «1» не только с целью подчеркнуть возможность усовершенствования подобных определений и необходимость классификации существующих, но также и для того, чтобы отразить в адекватном термине объект нашего постоянного подражания и источник новых идей при построении развитых информационных систем.

Термин «система управления» понимается нами в более широком смысле, чем АПУ класса $\mathscr{B}_{11}$. Система управления может быть предназначена для решения нескольких заданных проблем, обладать средствами самоизменения и при необходимости обращаться к ним и др. В частности, АПУ могут быть одними из компонент системы. Для сравнений и дальнейшей классификации систем управления их полное описание удобно представить через следующие компоненты:

1. Список типов подпрограмм, используемых в системе;

2. Головную подпрограмму, описывающую на уровне типов подпрограмм их взаимосвязи между собой и с объектом управления;

3. Условия начала работы системы;

4. Условия окончания работы системы (целевые состояния—заранее выделенные подмножества записей);

5. Тезаурус, в котором хранятся все подпрограммы системы и связанные с их работой данные.

Описание системы управления, включающее компоненты 2—4, также как и в § 3.4, будем называть *координатором.*

В системах управления будем выделять, в частности, следующие типы подпрограмм.

АПУ, определяющие некоторые отображения множества ситуаций S в множество управлений C, связанных с решаемыми проблемами управления.

Алгоритмы восприятия, которые преобразуют ситуации рассматриваемой задачи в первичные записи, допустимые для дальнейшего анализа алгоритмами системы. *Алгоритмы действия,* которые по записям, выработанным другими алгоритмами системы, и по наличным целевым состояниям выдают управление для анализируемой ситуации. Алгоритмы, которые задают некоторое однозначное отображение $U^m \to U^n$ при любых конечных m и n, где U—множество записей тезауруса, будем называть *анализаторами.* Представляется, что к анализаторам могут быть причислены, в частности, алгоритмы логического и индуктивного выводов, алгоритмы анализа и оценки описаний ситуаций, алгоритмы автоматического совершенствования анализаторов, в том числе усилители, алгоритмы самоанализа работы системы в целом и отдельных ее компонент (в частности, на основе построения и использования моде-

лей внешней к системе среды и собственной, а также их взаимодействия).

2.2. Исследуемые нами системы управления определяются следующим образом.

Пусть <Я, З>—определенные в § 1.1 язык и знаковая система соответственно.

1-*квазииндивидом в* <Я, З> *в момент времени* t, или 1t-*киндом в* <Я, З>, назовем произвольную тройку $\langle\theta,\Omega,V\rangle$, где θ и Ω—заданные в момент t тезаурус с хотя бы одной подпрограммой поиска управления (АПУ) и координатор, соответственно, а V—множество целевых состояний Ω, выделенных в θ.

Предполагается, что в тезаурусе заданного 1-кинда K зафиксированы поля z, s, x, a, b, y, называемые соответственно *целевым, ситуационным, входным, номеров координатора и активного алгоритма, выходным.*

Если γ—некоторый номер поля, то через (γ) будем обозначать запись, расположенную в γ. Через $\dot{a}$ обозначим номер поля, в котором содержится запись a, а через $\dot{\theta}$—множество всех номеров полей рассматриваемого тезауруса θ.

В этих полях могут размещаться следующие объекты: $(z)\in V$, $(s)\in S$, $(x)\in S\cup U\cup\dot{\theta}$, $(a),(b)\in U^*$, $(y)\in C\cup U\cup\dot{\theta}\cup V$, где S—множества ситуаций из области определения АПУ 1-кинда K, C—множество управлений тех же АПУ, U^*—подмножество записей алгоритмов из U.

В полях x и y, в отличие от полей z, a, b, может быть также пустая запись Λ.

Для заданного в момент t 1-кинда $K=\langle\theta,\ \Omega,\ V\rangle$, (a) есть номер Ω, $(z)\in V$ и (b) есть номер активного алгоритма Ω. Активный алгоритм (b) в момент t анализирует содержимое x и в момент $t+1$ размещает в полях x, a, b, y новые записи—результаты своей работы.

Подчеркнем, что результатом работы активного алгоритма в момент t может быть изменение отдельных записей, в частности, подпрограмм, используемых в координаторе, а также схемы его работы. Тем самым в момент $t+1$ произойдет переход к новому координатору. Если в момент t активным алгоритмом является некоторый АПУ, то вырабатываемое управление при прочих равных условиях определяется состоянием тезауруса $\theta(t)$. Конкретные формы этой зависимости могут быть различны, в частности, могут определяться числом или типом записей в $\theta(t)$.

В поле s указывается очередная ситуация решаемой проблемы, которая в период своего анализа стратегией f переносится в поле x.

Вообще говоря предполагается, что некоторые вычисления координатора могут сопровождаться действиями *стирания* и *переноса* записей или ситуаций.

Стирание в поле j понимается как замена записи в j на пустую Λ.

Перенос записи из поля j в поле i понимается как повторение в момент $t+1$ зписи из j в i, взамен записи, которая была в i в

момент t. При этом все другие записи остаются неизменными. Аналогично определяется перенос для ситуаций.

Если координатор (a) достигает в момент t целевого состояния (z), то в момент $t+1$ запись (z) переносится в y.

Предполагается, что процесс проверки достижения целевого состояния (z) есть выявление принадлежности (z) к множеству записей тезауруса того же типа, что и (z). Так, если (z)—формула, то сравнение производится в множестве формул тезауруса, если текст-то соответственно.

При $t=0$ поля x, b, y—пустые, в a записан некоторый координатор, который начинает работу, а в z—некоторое целевое состояние.

Состоянием $1t$-кинда K назовем список $\langle\theta, z, s, x, a, b, y\rangle$, где θ—состояние тезауруса K в момент t; z, x, a, b, y—записи в полях целевом, ситуационном, входном, координатора, активного алгоритма и выходном соответственно.

Начальное состояние K есть состояние K при $t=0$ и задается списком $\langle\theta, V, \Lambda, a, \Lambda, \Lambda\rangle$, где θ, V, a—тезаурус, целевое состояние и координатор в этот момент. Каждое последующее состояние получается как результат работы координатора a.

В дальнейшем, говоря о некотором 1-кинде K, мы будем иметь в виду каждый из $1t$-киндов, которые были порождены некоторым известным нам 10-киндом при $t=1, 2, \ldots$

Процессом работы 1-кинда K назовем произвольный конечный отрезок последовательности состояний K, полученных из начального состояния K шаг за шагом при $t=1, 2, \ldots$

Мы полагаем, что в тезаурусе предусмотрена область полей $\langle i, j\rangle$, $j=0, 1, 2, \ldots$, в которую частично записывается процесс работы 1-кинда в той же последовательности, в какой он возникает. А именно, если в момент t состояние 1-кинда есть $\langle\theta, z, x, a, b, y\rangle$, то в поле $\langle i, t\rangle$ помещается запись $\langle z, x, a, b, y\rangle$. В указанном смысле 1-кинд содержит всю свою предысторию, что, однако, не снимает вопроса об организации и извлечении накопленной информации.

2.3. Рассмотрим процесс решения проблем 1-киндом на примере $\mathcal{M}$-ситуаций § 1. 2.

Мы скажем, что 1-кинд K в $\langle$Я; З$\rangle=\langle$Я; Ξ, R, A, $F\rangle$ (см. § 1. 1) *интерпретирован в* $\mathcal{M}$*-ситуации* $\Gamma=\langle S, C, D, \mathcal{M}, \theta\rangle$ (см. § 1. 2), если выполнены следующие условия:

1. Определена структура для Ξ, где структура понимается так же, как и в § 1.5, а множество индивидов определяется компонентами Γ и множеством записей U;

2. Множество ситуаций S содержится в области определения каждого текущего АПУ K, а множество значений этих АПУ содержатся в множестве управлений C;

3. Каждой целевой ситуации из Q поставлено в соответствие целевое состояние K.

Пусть 1t-кинд $K=\langle\theta, f, v\rangle$ интерпретирован в Г и s_0 некоторая ситуация из S, называемая *начальной*.

Будем говорить, что K начал решать Г в момент t, если в ситуационном поле K в момент t содержится s_0, а в целевом—описание некоторой целевой ситуации из Q.

Элементарным циклом решения Г назовем произвольный отрезок $q_1, \ldots, q_r$ процесса работы 1-кинда такой, что в ситуационном поле q_1 записана некоторая ситуация s_1, в выходном поле q_r—некоторое управление из C, а выходные поля промежуточных состояний не содержат управлений.

Предполагается, что управление, полученное в момент окончания элементарного цикла, сразу же воздействует на наличную в этот момент ситуацию s_1, а в следующий момент в ситуационном поле 1-кинда располагается результирующая ситуация (результат воздействия управления и возмущения на s_1).

Циклом решения Г назовем последовательность элементарных циклов $э_1, \ldots, э_p$ таких, что в ситуационном и целевом полях $э_1$ содержатся некоторая начальная и целевая ситуации Г соответственно, а в выходном поле $э_p$ в отличие от всех других выходных полей содержится та же целевая ситуация Г, что и в $э_1$.

Момент завершения цикла интерпретируется как окончание решения индивидуальной задачи. При необходимости можно ввести специальное состояние «останова», после чего 1-кинд остается неизменным на заданный промежуток времени, а также зафиксировать время «жизни» или «существования» 1-киндов—конечное число тактов работы, после чего 1-кинд считается неспособным к каким-либо дальнейшим вычислениям.

В нашем изложении будут рассматриваться конечные процессы работы 1-киндов, интерпретированных в заданных проблемах.

3.1. *Сравнение систем управления.* Из вышесказанного следует, что управления, вырабатываемые 1-киндами, определяются однозначным образом. При этом можно утверждать, что *если компоненты заданных 1-киндов в некоторый момент времени t соответственно совпадают, то и управления в момент $t+1$, вырабатываемые ими в одних и тех же ситуациях, также совпадут.*

Важно подчеркнуть, что это утверждение не зависит от сложности исследуемых систем управления и позволяет идентифицировать их посредством сравнения порождающих механизмов. В условиях возможности изменения систем в зависимости от решенных и решаемых проблем этот путь может оказаться единственной альтернативой.

Указанный принцип в обобщенном виде используется также при обосновании описываемого ниже метода сравнения информационных структур. Отличие его от исходного лишь в том, что вместо совпадения компонент 1-киндов, требуется в определенном смысле их подобие.

Определим критерии подобия систем управления.

1-кинд K_1 в $\langle Я; \Xi_1, R_1, A_1, F_1\rangle$ назовем *подобным* 1-кинду K_2 в $\langle Я; \Xi_2, R_2, A_2, F_2\rangle$, если выполнены следующие условия:

1. Ξ_1 отлично от Ξ_2 разве лишь нелогическими символами или аксиомами;

2. Существует взаимооднозначное отображение алгоритмов из K_1 в K_2 такое, что алгоритмы образа и прообраза подобны;

3. Множества синтаксических схем текстов, включенных в тезаурусы K_1 и K_2, совпадают.

Понятие подобия алгоритмов уточняется следующим образом.

Будем говорить, что алгоритмы G_1 и G_2 в алфавитах A_1 и A_2 соответственно *подобны*, если существует взаимооднозначное соответствие $\varphi: A_1 \to A_2$ такое, что для произвольного слова c в A_1, если G_1 применимо к c и выдало слово $G_1(c)$, то G_2 будет применимо к слову $\varphi(c)$ в A_2 и выдаст слово $\varphi(G_1(c))$; если же G_1 неприменимо к c, то G_2 неприменимо к $\varphi(c)$.

В зависимости от особенностей решаемых задач возможны и другие определения подобия 1-киндов. В частности, его можно усилить, потребовав совпадения схем координаторов, поставленных в соответствие друг другу, и сохранив вышеуказанное определение подобия при сравнении алгоритмов каждого типа, указанного в координаторе.

Итак, подобие 1-киндов понимается как сходство их алгоритмической и синтаксической структур. В то же время информационные массивы, используемые в подобных 1-киндах, могут отличаться друг от друга.

В нашем изложении мы будем говорить также о близости или сходстве проблем друг к другу. Мы воздержимся от попытки формализовать это понятие, однако допустим, что умеем различать степень сходства проблем и говорить, в частности, об их максимальном различии.

3.2. Для произвольных $\mathcal{M}$-ситуации Г и множества 1-киндов $\mathcal{K}$ каждый заданный оператор качества алгоритмов β для Г, определяет для $\mathcal{K}$ некоторый, в общем случае, смешанный граф сравнений или β-граф Q с множеством вершин $\mathcal{K}$, в котором наличие направленного ребра от вершины K_1 к K_2 означает, что при решении Г 1-кинд K_1 в определенном смысле лучше K_2, а ненаправленное ребро означает, что K_1 и K_2 в том же смысле эквивалентны.

Рассмотрим следующую проблему L.

Пусть Г и З—фиксированные $\mathcal{M}$-ситуация и знаковая система, а $\mathcal{K}$—заданное множество 1-киндов в $\langle$Я, З$\rangle$, интерпретированных в Г.

Требуется построить β-граф для $\mathcal{K}$ в Г при заданном операторе качества β.

Традиционные методы решения этой проблемы основаны на следующих предположениях.

1. Имеется $\mathcal{M}$-ситуация Γ_1, степень сходства которой с Г заранее известна.

2. Γ_1 удобна при исследованиях, в частности, для нее выполне-

ны требования 2)—7) к проблемам-посредникам, перечисленные в § 2.4.

3. Исследуемые в Г и $Г_1$ операторы качества алгоритмов β совпадают.

4. В <Я, З> задано множество 1-киндов $\mathcal{K}'$, интерпретированных в $Г_1$, и таких, что существует взаимооднозначное соответствие между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, при котором образ и прообраз подобны.

5. Справедлива гипотеза $H1$: *если 1-кинд $K^{*\prime}$ является наилучшим из $\mathcal{K}'$ в $Г_1$ по критерию β и K^* есть его прообраз в $\mathcal{K}$, то K^* является наилучшим в Г по тому же критерию β.*

Эффективность этих методов прямо пропорциональна степени правдоподобия гипотезы $H1$, которую можно повышать независимым образом по следующим основным направлениям: 1) увеличение сходства модельной и исходной $\mathcal{M}$-ситуаций, 2) увеличение сходства между испытуемыми 1-киндами из $\mathcal{K}'$ и исходными, 3) повышение эффективности процедуры выявления $K^{*\prime}$.

Влияние первого фактора на достоверность гипотезы 1 выражается в том, что *при прочих равных условиях правдоподобие гипотезы $H1$ прямо пропорционально степени сходства исходной и модельной $\mathcal{M}$-ситуаций.* В частности, можно достичь такого же правдоподобия как и при использовании проблемы-посредника. Однако нас будет интересовать тот специальный случай проблемы L, когда мы существенно ограничены в наших возможностях увеличить сходство исходной $\mathcal{M}$-ситуации Г с модельной — $Г_1$ хотя бы потому, что Г плохо поставлена.

Нижеследующий способ компенсации отсутствия необходимого сходства $\mathcal{M}$-ситуаций основан на организации турнира моделей систем управления.

3.3. Пусть $Г_1, \ldots, Г_r$—список $\mathcal{M}$-ситуаций, для каждой из которых выполнены условия, сформулированные выше для $Г_1$. Мы полагаем, что если 1-кинд *$K^{*\prime}$ является наилучшим в $\mathcal{K}'$ для $\mathcal{M}$-ситуаций списка $Г_1, \ldots, Г_r$, то при прочих равных условиях правдоподобие гипотезы $H1$ прямо пропорционально длине списка r.*

Эвристической основой этого утверждения является убеждение в том, что наши возможности при решении новых проблем существенно зависят от количества решенных нами учебных проблем.

Эти возможности зависят также от того, в скольких конкурсах мы оказывались победителями.

Развивая идею сравнения 1-киндов через конкурсы, мы приходим к идее использования для той же цели турниров (см. §5.4). Если при конкурсах сравнение возможностей испытуемых объектов происходит опосредованно, через специальных экспертов (конкурсы чтецов и музыкантов, вступительные экзамены), то в турнирах сравниваемые объекты противопоставляют свои возможности друг другу непосредственно, в каждой из ситуаций заданной последовательности конфликтных ситуаций (спортивные соревнования, игры).

По существу принимается следующая гипотеза Н2: *при прочих равных условиях правдоподобие гипотезы Н1 тем выше, чем лучше место, занимаемое $K^{*\prime}$ в турнире.*

Турниры имеют следующие достоинства при сравнении информационных и алгоритмических компонент систем управления:

1) позволяют сравнить и оценить компоненты, имеющие, быть может, не более чем эвристическое обоснование;

2) процесс сравнения повторяем, так как исключены неконтролируемые факторы, в частности, человеческий;

3) сравнение компонент систем управления происходит при их полном взаимодействии с другими компонентами, основано на глобальных оценках и имеет законченный характер;

4) турниры достаточно просты для практического их проведения.

Правдоподобие решений, полученных методом турниров, в основном определяют значения рассмотренных выше факторов. В то же время при каждом достигнутом уровне их значений метод турниров сохраняет вышеуказанные достоинства. Отметим, что второе из них выгодно отличает метод турниров от метода экспертных оценок, использованного при оценке информационных структур в системе SMART [108] и Кренфилдском проекте [54].

3.4. Итак, пусть Г—некоторая $\mathcal{M}$-ситуация и $\mathcal{K}$—варианты 1-киндов, предназначенные для решения Г при сделанных выше предположениях на условия решения Г. Требуется выбрать оптимальный 1-кинд из $\mathcal{K}$ при операторе качества алгоритмов β, равном среднему отклонению решений от оптимальных при фиксированном среднем времени (см. § 4.1, 5.4).

Мы скажем, что выбор оптимального в $\mathcal{K}$ 1-кинда произведен на основе *метода турниров,* если выполнены следующие условия:

1. Для заданной игры И двух лиц с противоположными интересами построено множество 1-киндов $\mathcal{K}'$ в И, подобных элементам из $\mathcal{K}$;

2. Для множества $\mathcal{K}'$ определен турнир $\mathcal{T}$ в И типа, описанного в § 5.4.

3. Найден $\langle \mathcal{K}', \mathcal{T} \rangle$ оптимальный 1-кинд в И.

4. Оптимальный относительно Г 1-кинд из $\mathcal{K}$ есть прообраз $\langle \mathcal{K}', \mathcal{T} \rangle$ оптимального.

Заметим, что вышеуказанный оператор качества алгоритмов β выбран в предположении, что турнир в И, так же как и в шахматах, связан с β в соответствии с теоремой 1 § 5.4, обосновывающей экспериментальное измерение β посредством турниров.

Наше представление о сходстве модельных 1-киндов исходным выражено в требовании их подобия, т. е. эквивалентности алгоритмических и синтаксических структур. Однако заметим, что возможности повышения сходства 1-киндов далеко не исчерпаны. Например, если считать определенным понятие «интенсивность использования компонент в 1-киндах», то естественно предположить, что сходство 1-киндов

будет увеличиваться по мере приближения интенсивности использования компонент модельных 1-киндов с оригиналом.

3.5. Систематическое применение метода турниров для оценки эффективности систем управления в решаемых ими проблемах мы связываем с построением специальных модельных систем, в основу которых положено следующее определение.

Информационным компаратором для множества проблем $\mathcal{T}$ и 1-киндов $\mathcal{K}$ назовем список $\langle$И, Н, W, $\mathfrak{N}\rangle$, где И—игра; Н—множество тестовых ситуаций в И; W—множество записей, интерпретированных в И и таких, что для произвольного заданного 1-кинда K, $K \in \mathcal{K}$, из элементов W можно собрать 1-кинд K', подобный K; $\mathfrak{N}$—система инструкций по построению подобных 1-киндов, организации анализа и оценки результатов турнира.

Предполагается, что каждый информационный компаратор для $\langle \mathcal{T}, \mathcal{K} \rangle$ реализуется в виде некоторого комплекса программ для ЭВМ. Так, например, шахматный компаратор для оценки эффективности информационных структур в задачах, сходных с шахматной является частью пакета АКА1, описанного в § 1.6.

Перечислим некоторые возможности применения информационных компараторов.

В информатике это сравнение ИПС и их компонент, в частности структур данных, ИПЯ, алгоритмов поиска и др.

В исследованиях искусственного интеллекта, роботов, ситуационного управления, теории решения задач помимо объектов, относимых в информатике, можно сравнивать алгоритмы логического и индуктивного выводов, автоматического синтеза алгоритмов и моделей, различные модели внешней среды, алгоритмы перехода «действительность—смысл» и наоборот, а также различные методы принятия решений, методы синтеза стратегий, через сравнение самих стратегий и др.

Компараторы, аналогично Benchmark [163], могут найти применение при сравнении вычислительных структур, в частности, различных типов памяти. Область приложения информационных компараторов пересекается также с имитационным моделированием [135], в частности, с применением так называемых УАИМ (универсальных автоматизированных информационных моделей) в системном анализе, автоматизации проектирования и научного эксперимента [18]. При этом принципы построения 1-киндов в компараторах и моделирования в УАИМ во многом основаны на сходных идеях, что позволяет взаимно использовать их положительные стороны при построении программных комплексов. Так, можно сопоставить идеи модулей (кусочно-линейных агрегатов) и записей алгоритмов, схем сопряжения и координаторов, регистров и полей тезауруса, определяющих состояние 1-кинда и др. В обоих случаях предусмотрена пополняемость в процессе работы, многократность использования, оперативность настройки, возможность моделирования при разнородных компонентах исходного объекта моде-

лирования и др. В то же время в основу методологии оценивания в УАИМ (так же как и в Benchmark) положен факт наличия полной модели испытуемого объекта—системы управления и решаемой им проблемы. Представляется, что при отсутствии модели проблемы или недостаточном сходстве этой модели с оригиналом достоверность оценок, полученных на УАИМ, может резко упасть. Принцип турниров—основа компараторов, предполагает вычисление приемлемых оценок и при указанных неблагоприятных условиях.

В заключение отметим, что введение какой-либо меры измерения в науке обычно связывается с фиксацией эталонных объектов или процедур. Мы не считаем, что информатика отклонится от этого стандарта. Более того, в настоящем разделе мы стремились обосновать тезис о том, что систематические измерения в информатике, связанные с системами управления, должны быть основаны на постулировании специальных модельных систем и процедур их исследования.

§ 5. К взаимосвязи психологии развития с теорией и методами адаптации комбинаторных алгоритмов

1. Для анализа вышеуказанной взаимосвязи мы используем одну из известных концепций развития интеллекта, выдвинутую Ж. Пиаже и его учениками. После описания основных положений генетической психологии, будет сделана попытка интерпретации некоторых психологических понятий в рамках теории АКА, после чего будут рассмотрены возможности взаимодействия этой теории с генетической психологией.

2. Изложение концепции развития интеллекта по Ж. Пиаже будет дано по работе Дж. Х. Флейвелла [121] (с предисловием Ж. Пиаже), в которой дано сжатое описание и анализ основных результатов Ж. Пиаже по материалам его весьма многочисленных публикаций.

Под *познавательным поведением* в [121] понимается поведение человека, связанное с приемом, переработкой и накоплением данных с целью оптимального приспособления к окружающему миру. Каждому типу поведения сопоставляется определенная внутренняя конструкция человека—*познавательная структура,* которая описывает представление исследователя о причинно-следственных связях, ответственных за данный тип поведения.

Несмотря на понимание познавательных структур как определенных материальных образований в организме человека описание этих структур дается через их функциональные характеристики, в частности, через описание системы организованных действий или операций.

Операцией Ж. Пиаже называет произвольный акт над представ-

лениями (интериоризованное действие), являющийся составной частью организованной сети аналогичных актов. К ним относятся логические операции сложения, умножения, числовые операции, операции включающие категории количества, времени, пространства и др.

В тех случаях, когда описание структур дается в терминах внешних действий человека, познавательные структуры в теории Пиаже носят название *схем действия.* Например, схемы сосания, схватывания, рассматривания и др. Система всех познавательных структур человека составляет его *интеллект.*

Интеллект развивается в недрах определенной биологической конструкции, полученной по наследству. Специфика этой конструкции несомненно накладывает определенные ограничения на его развитие. В частности, наше восприятие мира является одним из многих возможных восприятий (нет оснований утверждать, что оно наилучшее), и оно существенно влияет на строение самых основных наших понятий. Однако в дар от биологии организм получает не только врожденные структуры, которые можно рассматривать иногда как препятствие для прогресса интеллекта, но и нечто такое, что позволяет в конце концов преодолевать эти структурные границы [121].

Пиаже утверждает, что то позитивное, конструктивное нечто, которое мы получаем по наследству, состоит в способе познавательного функционирования организма.

Результатом этого функционирования является порождение всех познавательных структур. При этом, что весьма существенно, Пиаже считает способ порождения познавательных структур неизменным на протяжении всей жизни организма.

Формирование познавательных структур в виде целостных образований можно понимать как результат работы специальных процедур, природа которых раскрывается через понятия *адаптации, организации и уравновешивания.*

Под адаптацией понимается результирующая двух процессов— *ассимиляции и аккомодации.*

Ассимиляция—это включение новой проблемной ситуации в состав тех, с которыми организм уже справляется, *без изменения* наличных структур. В области познавательной деятельности ассимиляция означает тот факт, что при встрече познающего организма с внешним объектом в нем происходит некоторое познавательное структуирование, воссоздание структуры этого объекта в соответствии с характером наличной интеллектуальной организации.

Аккомодация—это включение новой проблемной ситуации в состав тех, с которыми организм уже справляется, *посредством изменения* наличных структур или создания новых. Аккомодацией организм пользуется в тех случаях, когда ему в познавательных процессах необходимо схватить отличительные черты новых объектов, которые невозможно или слишком сложно интерпретировать посредством ранее существующих познавательных структур.

При этом «интеллект не может аккомодироваться к тем потенци-

альным особенностям предмета, которые он не может уподобить ничему в имеющейся у него сейчас системе значений. Между новым и старым не должна лежать непроходимая пропасть» ([121], стр. 76).

Ассимиляция и аккомодация составляют динамический аспект познавательного функционирования. Статический аспект составляет способ *организации* этих двух приспособительных актов.

Ассимиляция и аккомодация неразрывно связаны друг с другом в неразрывное целое. Характер этой связи обеспечивает их определенное равновесие в процессе адаптации. А именно, аккомодация «склонная к рабскому следованию действительности и наивному реализму, эффективно контролируется ассимиляцией, способной направлять и организовывать аккомодацию». В свою очередь, ассимиляция не становится чрезмерно оторванной от действительности благодаря непрерывному аккомодационному приспособлению к ней. Однако, указывает Пиаже, существуют два вида познавательной деятельности, в которых указанное равновесие нарушено. Это игра и подражание.

Уравновешиванием называется процесс, в котором требования среды и совокупность познавательных структур организма стремятся к равновесию друг с другом. Процесс уравновешивания продолжается на протяжении всей жизни организма и характеризуется последовательным возникновением состояний относительного равновесия. Познавательное поведение Ж. Пиаже характеризует следующим образом. Он считает, что субъект познает объект только в воздействии на этот объект и преобразовании его в определенном отношении ([121], стр. 437); при этом «чувственный опыт объективизируется только в той мере, в какой субъект оказывается активным» ([121], стр. 100).

«...Интеллект начинает свое существование не с познания человеком самого себя и не с познания им вещей как таковых, но с познания их взаимодействия, и, только распространяясь одновременно по направлению к обоим полюсам этого взаимодействия, интеллект организует мир, организуя самого себя ([121], стр. 90).

«...Познание никак не может быть простой копией, потому что оно всегда состоит в установлении взаимоотношения объекта и субъекта, оно всегда означает введение объекта в схемы, обязанные своим возникновением активности и *просто* аккомодирующиеся к объекту, причем последний становится понятным для субъекта. Если сказать еще по-другому, то для познания объект существует только в своих отношениях с субъектом, и если ум все же приближается к овладеванию вещью, то это обеспечивается все более активной организацией им опыта, а не простой имитацией, рассматриваемой со стороны готовой и неизменной реальной действительности. Объект—это «не количество познанного», а результат построения» ([121], стр. 100).

Как можно заключить из [121] в работах Пиаже и его коллег отсутствует подробное описание последовательного развития интеллекта под воздействием вышеуказанной процедуры. Тем не менее все их многочисленные наблюдения и эксперименты по развитию личности

объяснены ими в рамках указанных понятий адаптации, организации и уравновешивания.

Основной метод исследования интеллекта, применяемый Пиаже, состоит в том, что каждый раз испытуемому предъявляются тестовые задачи из некоторого класса эквивалентных по тем или иным соображениям задач, а затем по реакции испытуемого на эти задачи определяется степень его интеллектуального развития. Таким образом анализ развития интеллекта производится через анализ его функционирования, а не конкретных внутренних конструкций, порождающих его. (Отметим, что данный критерий сродни критерию Тьюринга оценки интеллектуальных способностей машин посредством их опрашивания [118]).

Согласно Ж. Пиаже, интеллектуальное развитие обнаруживает достаточную качественную разнородность, чтобы сделать возможным разбиение его на отдельные стадии развития. Это значит, что поведение ребенка не просто становится все более совершенным, изменяясь совершенно непрерывным образом, а то, что в этом поведении можно обнаружить периоды *качественного* сходства и различия.

Познавательные структуры выделяются в отдельную стадию развития, если свойства этих структур находятся в определенном состоянии равновесия и в совокупности составляют нечто целое, по выражению Пиаже, составляют структурный ансамбль.

При этом в становлении целостной стадии различаются периоды первоначальной подготовки и конечной реализации.

Ж. Пиаже подчеркивает, что именно появление определенных объективно существующих свойств интеллекта в неизменном и постоянном порядке позволяет выделить стадии развития. Каждый человек, согласно Пиаже, начинает с нулевой ступени развития и последовательно поднимается на более высокие ступени, не пропуская и не перепрыгивая через какие-то из них.

При этом разные люди на протяжении своей жизни достигают разных конечных высот, а возраст, при котором достигается та или иная ступень, может варьировать в весьма широких пределах.

Утверждение Пиаже о неизменной последовательности стадий развития интеллекта, составляет один из краеугольных пунктов его теории. Об окончательной правильности этого утверждения пока, видимо, судить рано, несмотря на многочисленные подтверждающие наблюдения и эксперименты Пиаже, а также ряда других психологов.

Однако, приняв это положение как гипотезу, можно задать вопрос о причинах указанной стабильности.

Безусловно, оно существенно зависит от строения организма и среды, в которой он развивается. Однако возможны и другие факторы, вытекающие из природы информационных структур и возможностей их формирования, безотносительно к строению организма человека. Выявлению этих факторов могут способствовать также сравнительные исследования по адаптации животных.

Важной особенностью стадий развития является то, что познавательные структуры, свойственные ранним стадиям вливаются или включаются в структуры, свойственные последующим стадиям. По выражению Пиаже, они «...накладываются друг на друга на манер колец пирамидки, снизу вверх или сверху вниз, так что новые формы поведения просто добавляются к старым, чтобы дополнить их, исправить или сочетаться с ними» ([121], стр. 124). При этом каждую стадию развития выделяет наиболее совершенная форма поведения внутри нее.

Важно также отметить, что в процессе развития многие структуры как бы появляются вновь и вновь либо на одной и той же стадии с новыми областями применимости, либо на разных стадиях быть может с прежними областями применимости, но при сходстве между структурами только по форме.

За исходный уровень развития интеллекта принимается интеллект новорожденного, который изначально располагает весьма большой совокупностью сведений об ограничениях окружающего его мира и значительными средствами для взаимодействия с ним.

Конструкция младенца с момента рождения «знает» о многих свойствах мира, в который он вступает. Например, она предполагает, что ребенок будет ходить по твердой поверхности, будет дышать воздухом; органы пищеварения настроены на пищу, которая реально существует, совокупность органов чувств такова, что позволяет ему в дальнейшем совершать достаточно эффективную классификацию объектов, и т. д.

Новорожденные обладают специальным набором безусловных рефлексов (сосание, движение языка, смотрение, крики и др.), Безусловные рефлексы—первоначальные способы взаимодействия интеллекта с окружающей средой—являются кирпичиками для образования более поздних организованных действий. С самого начала они настроены именно на тот мир, в котором предстоит жить человеку.

Данные об ограничениях на мир, выраженные в конструкции организма и безусловных рефлексах младенца, отражают сравнительно постоянно существующие свойства той части мира, в котором развивался человеческий род, и потому информация о них запоминается в «долговременной памяти» человечества—в генетическом коде каждого человека.

Можно сказать, что с момента рождения интеллект младенца гармонично вписывается в мир, в котором ему предстоит функционировать. Дальнейшее развитие интеллекта согласно Ж. Пиаже разбивается на нижеследующие периоды.

1. Период *сенсомоторного* интеллекта (0—2 года).

В течение этого периода младенец переходит от рефлекторного уровня новорожденного, когда личность и окружающий мир абсолютно не дифференцируются, к относительно связанной организации сенсомоторных действий с его непосредственным окружением. В этом периоде приспособление осуществляется посредством перцеп-

тивных и двигательных актов, а символические манипуляции отсутствуют.

В сенсомоторном периоде выделяются 6 стадий развития.

2. Период *подготовки и организации конкретных операций* (2 года—11 лет).

Этот период начинается с первых грубых символизаций в конце сенсомоторного периода и кончается с первым появлением формального мышления в раннем подростковом возрасте. Здесь выделяются 2 подпериода. Это подпериод *дооперациональных* представлений (2—7 лет), когда происходит подготовка к конкретным операциям и индивид делает свои первые и довольно неорганизованные попытки овладеть новым и странным для него миром символов. В течении этого подпериода образное мышление ребенка отягощено всеми искажениями и неустойчивостью сенсомоторной фазы: конкретностью, феноменализмом, необратимостью, эгоцентризмом, предпонятиями и др.

В этом подпериоде Пиаже различает иногда 3 стадии.

Второй подпериод—это подпериод *конкретных* операций (7—11 лет), когда понятийная организация окружающей среды медленно стабилизируется и закрепляется у ребенка с помощью создания ряда познавательных структур, называемых *группировками.*

Мир представлений ребенка впервые начинает приобретать устойчивость, связность и упорядоченность. Одним из первых выражений этого новоприобретенного равновесия является понимание сохранения некоторых свойств объекта перед лицом их видимых изменений: количества, веса, объема, длины, площади и др.

3. Период *формальных операций* (11—15 лет).

Заключительным этапом каждого большого периода является уравновешивание некоторых типов систем поведения. В первом периоде уравновешивание касалось внешних—сенсорных и двигательных действий. Для второго и третьего периодов характерно уравновешивание внутренних операций над символами и представлениями.

С помощью конкретных операций ребенок классифицирует реальную действительность, упорядочивает, нумерует ее явления и т. д.

Конкретные операции 2 периода конкретны в том смысле, что они относятся к объектам и явлениям существующим в данный момент. Лишь в некоторых случаях ребенок 7—11 лет может экстраполировать эти операции на нечто, в настоящий момент не существующее.

Содержанием же операций формального периода являются результаты операций периода конкретных операций, а именно, предложения и утверждения, полученные методами конкретных операций. В мышлении подростка в сильной мере меняются соотношения между реально существующими событиями и возможными. Подросток начинает анализ задачи с попытки выявить все возможные отнощения, применимые к имеющимся у него данным, а потом пытается путем сочетания эксперимента и логического анализа установить, какие из возможных отношений здесь реально существуют.

Таким образом мышление подростка становится гипотетико-дедуктивным.

Познавательные структуры, присущие периоду формальных операций, венчают иерархию стадий развития интеллекта, введенные Пиаже. Их формирование завершается к 16 годам, после чего развитие интеллекта может быть описано количественно. Указанная иерархия, как было уже сказано, получена посредством соответствующей иерархии типов задач. Хотя сам Пиаже не выписывал эти задачи в форме иерархической последовательности, однако такие попытки на основе его материалов предпринимались другими исследователями интеллекта. Обзор работ по созданию стандартных интеллектуальных тестовых задач приведен в [121].

3. Проведем аналогии между познавательным поведением человека и процессами, связанными с адаптацией алгоритмов методами комбинаторной регуляризации (см. также § 1.4).

Представляется, что аналогом познавательного поведения являются процессы, связанные с усилением разрешающих процедур комбинаторных проблем посредством их регуляризации. Познавательным структурам естественно поставить в соответствие элементы комбинаторных алгоритмов, порожденные работой усилителей, а действиям и операциям—описание принципов функционирования этих элементов. При этом схемам действия соответствуют описания элементов алгоритмов через их внешние проявления (передвижения фигур, сообщения оператору и др.).

Процедуре формирования познавательных структур соответствует конкретный тип преобразователя алгоритмов, характеризуемый ассимиляцией, аккомодацией, организацией и уравновешиванием. При этом в понятие «адаптация» нами вкладывается смысл, отличный от понимания Ж. Пиаже.

У нас адаптация—процесс итеративного усиления разрешающего алгоритма в условиях, вообще говоря, отсутствия рекурсивного представления критерия эффективности этого алгоритма. У Ж. Пиаже—описание работы *конкретного* преобразователя алгоритмов, компонентами которого являются процедуры ассимиляции и аккомодации.

У нас об адаптации можно говорить только при наличии усиления, у Пиаже также и при отсутствии последнего, лишь бы имели место ассимиляция или аккомодация. Представляется, что такое понимание адаптации у Ж. Пиаже связано не с тем, что он рассматривает это понятие вне связи с усилением, а ввиду трудностей оценки усиления алгоритмов, в частности познавательных структур у человека, а также ввиду высокой степени корреляции усиления с процедурами ассимиляции и аккомодации.

Процессу ассимиляции при преобразованиях алгоритмов с целью их усиления можно поставить в соответствие, в частности, преобразования, связанные с расширением списков тех или иных знаний посредством добавления к ним записей, фиксирующих результаты интерпретации, распознавания исследуемой ситуации в рамках наличных зна-

ний. В частности, это могут быть описания исследуемых индивидов.

Аккомодации, видимо, следует сопоставить те или иные преобразования алгоритмов, связанные с включением в списки вновь синтезированных знаний, в частности, элементов языка. Организация и уравновешивание определяют конкретный способ взаимодействия процессов ассимиляции и аккомодации как между собой, так и с исследуемыми проблемными ситуациями.

4. Рассмотрим аспекты исследования адаптации комбинаторных алгоритмов, непосредственно связанные с вопросами развития интеллекта.

Прежде всего необходимо отметить, что в силу комбинаторности проблем (см. § 1.4), класс рассматриваемых для их решения алгоритмов включает ряд компонент, присущих интеллекту человека. В частности, это язык, цели, планы, закономерности и др., в определенной мере определившие выбор названия «искусственный интеллект» для области исследований сложных комбинаторных проблем. Уточнение указанных структур, процедур их синтеза и усиления на их основе обогащает представление исследователей о возможных механизмах развития интеллекта человека, способствует расширению языка для описания процесса развития и др.

В указанном смысле можно считать, что исследования по теории АКА одновременно относятся к исследованиям развития интеллекта.

Однако в рамках теории АКА можно ставить вопросы, имеющие более непосредственное отношение к развитию интеллекта. Рассмотрим некоторые из них. Согласно взглядам Ж. Пиаже развитие интеллекта обеспечивается процедурой, характеризуемой, в частности, ассимиляцией и аккомодацией. Эта процедура неизменна на всех стадиях развития интеллекта, обеспечивает его последовательное, иерархическое развитие, инвариантное ко многим изменениям условий, в которых оно протекает. При этом каждая стадия развития задает вполне определенный уровень, к которому можно перейти на следующем шаге развития.

Исходя из материалов психологических исследований можно формализовать процедуру развития по Ж. Пиаже в виде конкретного операторного алгоритма—преобразователя Пиаже ($\omega_п$) и рассмотреть его возможности в рамках теории АКА. Представляет интерес получения утверждений, например, следующего вида:

1. $\omega_п$ способен усиливать в ПОУ^ш (ЭАПУ $f_0(\omega_п(f_0)>f_0)$);
2. $\omega_п$ (не)способен обеспечить достижение α-оптимума;

   во втором случае можно попытаться выявить граничные возможности $\omega_п$ как усилителя;
3. $\omega_п$ способен обеспечить достижение АПУ f'' только тогда, когда исходный АПУ f_0 не слабее f';
4. $\omega_п$ способен усилить исходный АПУ на основе синтеза конкретных познавательных структур типа γ (например, логических или арифметических операций);

5. ω_n приводит к одной и той же последовательности уровней усиления каждого из исходных АПУ типа γ_1 независимо от вариаций условий типа γ_2, при которых применяется ω_n.

5. Связь теории АКА с исследованиями по развитию интеллекта не является односторонней. В свою очередь психологические данные могут послужить обогащению теории и методов АКА. Это могут быть факты, характеризующие преобразователь Пиаже, описания иерархии и последовательности стадий развития интеллекта, описание генезиса конкретных познавательных структур и др. Особую ценность представляют методы развития интеллекта, полученные в условиях (искусственных или естественных) его полного контроля, как это происходит, например, при обучении слепоглухонемых детей [66]. Интересны также психологические данные, полученные как ответы на сформулированные в рамках теории АКА вопросы, быть может, для конкретных предметных областей, например, шахмат. В связи с этим в заключение приведем список вопросов, относящихся к психологии шахматиста и интересных с точки зрения теории АКА.

1. О роли памяти в игре

1.1. Что Вы можете сказать о роли памяти в игре? Можете ли Вы примерно оценить число партий, которые Вы помните? Как часто Вы их используете в практической игре, в анализе? Что именно от партий Вы запоминаете?

1.2. Как по заданной позиции Вы бы вспоминали похожую или полезную? Осмыслен ли такой вопрос без знания самой партии до указанной позиции? Опишите процесс вспоминания похожих (полезных) позиций для позиции, указанной на заданном рисунке.

1.3. Что можно сказать по заданной позиции о партии, которая игралась? Какие черты позиции позволяют восстановить предысторию, в частности дебют?

1.4. Как Вы используете шахматную литературу в процессе анализа партий? Как надо? Опишите.

1.5. Что Вы получаете полезного от комментариев к шахматной партии?

1.6. Опишите роль пешечных структур при узнавании и сравнении позиций.

1.7. Если бы у Вас была шахматная информационная машина, хранящая шахматные партии с их анализом, то какие вопросы Вы бы хотели задать этой машине? В чем Вы видите пользу от такой машины?

2. О шахматном языке

2.1. Ознакомьтесь с заданным списком шахматных понятий. Считаете ли Вы его полным? Какие термины могли бы Вы добавить?

2.2. Какова роль такого словаря при *запоминании* партий, при общении шахматистов друг с другом?

2.3. Считаете ли Вы правильной следующую гипотезу: если две произвольные позиции описываются примерно одинаково в терминах указанного словаря, то они по существу одинаковы? Обоснуйте Ваше мнение.

2.4. Согласны ли Вы с нашей классификацией шахматных понятий на имеющие точный смысл и не имеющие его? Какие еще понятия можете Вы добавить? Перечислить и, если возможно, сослаться на литературу.

3. О развитии шахматных способностей

3.1. Считается, что Капабланка в 4 года *самостоятельно* научился игре в шахматы. Могло ли это произойти на самом деле? Какие знания получил 4-летний Капабланка от взрослых, прежде чем самостоятельно понял правила игры? Можете ли Вы описать аналогичные случаи «эффекта Капабланки»?

3.2. Можете ли Вы указать последовательность усложняющихся понятий, которые вырабатываются у шахматиста с самого начала его шахматной деятельности? Что он получает из окружения и до чего додумывается сам?

3.3. Укажите перечень знаний, необходимых на Ваш взгляд для решения: эндшпилей, n-ходовок, n=1,2,..., этюдов. Попробуйте расположить их в порядке усложнения.

3.4. Можно ли указать перечень знаний, необходимых шахматисту каждой категории? Как Вы относитесь к степени объективности классификации уровня игры шахматистов по коэффициентам Эло?

3.5. Как бы Вы стали учить ребенка шахматам? С какого возраста, в какой последовательности? Опишите Ваш опыт в этом направлении.

Список сокращений

АКА	адаптация комбинаторных алгоритмов
АПВ	алгоритм предельных вычислений
АПУ	алгоритм поиска управлений
АУО	алгоритм упорядочения описаний
АПЦ	алгоритм вычисления правдоподобия целей
АСС	алгоритм синтеза стратегий
АПТ	алгоритм поиска знаний в тезаурусе
абс.	абсолютный
ГПН	генератор последовательности номеров
г.ц.	глобальная цель
ДУ	дифференциальное уравнение
д.м.т.	длина минимального теста
д.н.ф.	дизъюнктивная нормальная форма
ИВ	индуктивный вывод
ИПС	информационно-поисковая система
ИЭ	испытуемый элемент

КС	комплексная сложность
КИ	количество ударов игрока
КП	количество ударов противника
к.н ф.	конъюнктивная нормальная форма
л.ц.	локальная цель
м.н.н.	максимально недопустимый набор
м.п.н.н.	множество попарно несравнимых наборов
МЛТ-1	метод локальных турниров I
н.н.	недопустимый набор
НОПТ	проблема накопления, организации и поиска знаний в тезаурусе
ОПi	образ позиций типа i
ОСi	образ ситуаций типа i
ОРФ	общерекурсивная функция
ПРО	проблема расшифровки описаний
ПРО1	проблема расшифровки описаний типа 1
ПАКА i	проблема АКА при ограничениях типа i
ПМ	пара множеств
ПОУ	проблема оптимального комбинаторного управления
ПОУ^{ш}	то же в шахматах
ПОУ^{к}	проблема оптимального управления классическая
ПСГ	проблема поиска стратегий в графе игры
ПСГ^{ш}	то же для шахмат
ПСГ	проблема поиска $<P,F,l>$-стратегий в графе игры
ПВ	проблема поиска логического вывода в исчислении высказываний
ПВ$_{п}$	то же от n-переменных
ПРС	проблема распознавания статистическая
ПП	проблема-посредник (в § 9.5 поисковое предписание)
ПО	поисковый образ
ППП	пакет прикладных программ
РГПН	расширяющийся генератор последовательности номеров
РА	процедура расшифровки конечных автоматов
РР	разработано и реализовано
Ра	разработано
СКС	средняя комплексная сложность
СРГПН	согласованный РГПН
СемП	семантическое представление
СЦ	список целей
СД	справочная дескрипторов
СТИ	справочная текущей игры
СП целей (СП-j)	схема вычисления правдоподобия целей (общих частей СП целей)
СП(Q)	список планов, порожденных целями списка Q
ТАВТ	проблема распознавания тавтологий
ТАВТп	то же от n-переменных
ФАПО	проблема формирования алгоритмов, порожденных $<F,l>$-образами ситуаций
ФОС	проблема формирования образов ситуаций
ФОПА	формирование образов и порожденных ими алгоритмов
ф.в.	форсированный вариант
ФЗ-i	проблема формирования закономерностей типа i
ФЦ-U	проблема формирования целей при известном списке целей U
х.п.	характеристическая последовательность
х.д.	характеристическая двойка
«ч.я.»	«черный ящик»
э.д.а.	элемент диаграммы автомата
э.р.а.	экстремальный распознающий алгоритм

Литература

1. *Авербах Ю. Л., Бейлин М. А.* В королевстве шахматных фигур, М., изд-во «Физкультура и спорт», 1976.
2. *Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Битман А. Р., Животовский А. А., Усков А. В.* О программировании игры вычислительной машины в шахматы, УМН 25, вып. 2 (152), 1970.
3. *Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Донской М. В.* Программирование игр, М., Наука, 1978.
4. *Адельсон-Вельский Г. М., Арлазаров В. Л., Донской М. В.* Программирование шахматной игры, Вестник АН СССР, № 4, 1978.
5. *Айзенберг Н. Н., Циткин А. И.* Вопросы применения простых тестов, «Кибернетика», № 1, 1974.
6. *Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., Наука, 1970.
7. *Айзерман М. А., Малишевский А. В.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов, препринт, М., Институт проблем управления, 1980.
8. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов, М., Мир, 1979.
9. *Барздинь Я. М., Фрейвалд Р. В.* О прогнозировании общерекурсивных функций, ДАН СССР, т. 206, № 3, 1972.
10. *Барздинь Я. М., Этмане И. Э.* Об индуктивном синтезе алгоритмов. Тезисы докладов Всесоюз. конф. «Методы мат. логики в проблемах искусств. интеллекта и систематическое программирование», Паланга, 3—5 сент., 1980.
11. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления, М., Наука, 1969.
12. *Бенерджи Р.* Теория решения задач, М., Мир, 1972.
13. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления, М., 1966.
14. *Ботвинник М. М.* О решении неточных переборных задач, М., «Советское радио», 1979.
15. *Ботвинник М. М.* «О кибернетической цели игры», М., «Советское радио», 1975.
16. *Брутян Х. К., Заславский И. Д., Мкртчян Л. В.* О некоторых методах автоматического синтеза позиционных стратегий в играх, «Проблемы кибернетики», в. 19, М., 1967.
17. *Брутян Х. К.* Автоматический поиск стратегий в некоторых играх эвристическими методами, «Проблемы кибернетики», в. 24, М., 1974.
18. *Бусленко Н. П.* Сложные системы и имитационные модели, «Кибернетика», № 6, 1976.
19. *Вапник В. Н., Червоненкис А. Н.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения), М., 1974.
20. *Визинг В. Г.* О формализации некоторых понятий, связанных с экспериментами, «Кибернетика», № 6, 1971.
21. *Виленкин Н. Я., Шрейдер Ю. А.* Мажоритарные пространства и квантор «большинства», «Семиотика и информатика», в. 8, ВИНИТИ, М., 1977.
22. *Воробьев Н. Н.* Современное состояние теории игр, УМН, т. XXV, в. 2(152), 1970.

23. *Воробьев Н. Н.* Принцип оптимальности Нэша для общих арбитражных схем, сб. «Теоретико-игровые вопросы принятия решений», Л., Наука, 1978.
24. *Гик Е. Я.* Математика на шахматной доске, М., 1976.
25. *Гильберт Э. Н.* Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций, «Киб. сборник», вып. 1, 1960.
26. *Глушков В. М.* Синтез цифровых автоматов, М., Изд-во физ.-мат. литер., 1962.
27. *Гольфанд Я. Ю., Футер А. Л.* Реализация дебютной справочной для шахматной програмы, «Проблемы кибернетики», вып. 29, 1974.
28. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. I, под общей ред. Яблонского С. В. и Лупанова О. Б., М., 1974.
29. *Дмитриев А. Н., Журавлев Ю. И., Кренделев Ф. И.* Математические принципы классификации предметов и явлений, сб. Дискретный анализ, № 7, Новосибирск, 1967.
30. *Донской М. В.* О программе, играющей в шахматы, «Проблемы кибернетики», в. 29, М., 1974
31. *Дружинин Н. К.* Логика оценки статистических гипотез, М., 1973.
32. *Ефимов Е. И., Поспелов Д. А., Литвинцев Л. В., Бибин Г. Б., Нисенбойм Л. Б.* Теоретические проблемы ситуационного управления (препринт). М., 1975.
33. *Журавлев Ю. И.* Об отделимости подмножеств n-мерного единичного куба, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. I, 1958.
34. *Журавлев Ю. И.,* Теоретико-множественные методы алгебры логики, сб. «Проблемы кибернетики», в. 8, М., 1962.
35. *Журавлев Ю. И., Никифоров В. В.* Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок, «Кибернетика», № 3, 1971.
36. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации, сб. «Проблемы кибернетики», в. 33, 1978.
37. *Завалишин П. В., Мучник И. Б.* Модели зрительного восприятия и алгоритмы анализа изображений, М., 1974.
38. *Заславский И. Д.* Симметрическая конструктивная логика, Ереван, 1978.
39. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов, УМН 25, № 6, 1970.
40. Интегральные роботы, сборник статей, М., Мир, 1973.
41. *Кангер С.* Упрощенный метод доказательства для элементарной логики. Математическая теория логического вывода, М., 1967.
42. *Канович М. И.* Теорема об ускорении в формальных системах, сб. «Сложность вычислений и алгоритмов», М., Мир, 1974.
43. *Карапетян Б. К., Погосян Э. М.* Расшифровка автоматов как разновидность индуктивного вывода. «Материалы VIII Всесоюзного симпозиума по кибернетике», Тбилиси, 9—12 ноября, 1976.
44. *Карапетян Б. К., Погосян Э. М.* Индукторы и их связь с методом эмпирических предсказаний, «Вычислительные системы», 69, сб. трудов, Новосибирск, 1977.
45. *Кацнельсон С. Д.* Содержание слова, значение и обозначение, М., 1965.
46. *Клыков Ю. И., Поспелов Д. А.* Создание модели внешнего мира в памяти вычислительной машины, «Проблемы эвристики», М., 1969.
47. *Ковалевский В. А.* Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики. В кн.: Читающие автоматы, Киев, «Наукова думка», 1965.
48. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия количества информации, сб. «Проблемы передачи информации», т. I, 1965.
49. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование, М., Наука, 1968
50. *Коробков В. К.* О монотонных функциях алгебры логики, «Проблемы кибернетики», в. 13, М., 1965.
51. *Коршунов А. В.* О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц, «Кибернетика», № 6, 1970.

52. *Котов А.* Комбинационное зрение. «Шахматы в СССР», № 7, 1975.
53. *Кук С. А.* Сложность процедур вывода теорем, «Кибернетический сб.», новая серия, в. 12, 1975.
54. *Ланкастер Ф.* Информационно-поисковые системы, М., Мир, 1972.
55. *Ласкер Э.* Учебник шахматной игры, М., «Физ.-спорт», 1980.
56. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1965.
57. *Марков А. А.* О конструктивной математике, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 8—14, 1962.
58. *Мартиросян А. А., Погосян Э. М.* Об устойчивости сравнительных характеристик согласующих индукторов, сб. «Семиотика и информатика», в. 14, ВИНИТИ, М., 1979.
59. *Мартынов В. В.* Семиологические основы информатики, Минск, Наука и техника, 1974.
60. *Мартынов В. В.* Универсальный семантический код, Минск, Наука и техника, 1977.
61. *Маслов С. Ю.* Поиск вывода как модель эвристического процесса, «Кибернетика», № 5, 1972.
62. *Маслов С. Ю.* О поиске вывода в исчислениях общего вида, «Записки научных семинаров», изд. ЛОМИ им. В. А. Стеклова, XCVIII, М.—Л., 1972.
63. *Маслов С. Ю.* Информация в исчислении и рационализация переборов, «Кибернетика», № 2, 1979.
64. *Маслов С. Ю.* Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества, «Семиотика и информатика», в. 13, 1979.
65. *Мельчук И. А.* Опыт теории лингвистических моделей «смысл↔текст», М., 1974.
66. *Мещеряков А. И.* Обучение слепоглухонемых детей, М., 1976.
67. *Мики Д.* Формирование и выполнение планов вычислительной машиной, сб. «Интегральные роботы», в. 2, под ред. Поздняка Г. Е., М., 1975.
68. *Минский М., Пейперт С.* Персептроны, М., Мир, 1971.
69. *Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С.* Основы информатики, М., Наука, 1968.
70. *Михеев В. М.* О множествах, содержащих наибольшее число попарно несравнимых булевых векторов, сб. «Проблемы кибернетики», в. 2, 1959.
71. *Моисеев Н. Н., Иващелов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации, М., Наука, 1978.
72. *Мур Э. Ф.* Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами, сб. «Автоматы», ИЛ, 1956.
73. *Оуэн Г.* Теория игр, М., Мир, 1971.
74. *Панова Н. С., Шрейдер Ю. А.* О знаковой природе классификации, НТИ, сер. 2, № 12, 1974.
75. *Пархоменко П. П.* Теория вопросников, «Автоматика и телемеханика», № 4, 1970.
76. *Пиаже Ж., Инельдер Б.* Генезис элементарных логических структур, М., ИЛ, 1963.
77. *Погосян Э. М.* О количественных характеристиках тестов, Изв. АН АрмССР, т. V, № 1, 1970.
78. *Погосян Э. М.* О нижних оценках длин минимальных тестов, ДАН АрмССР, т. L, № 2, 1970.
79. *Погосян Э. М.* Об одной комбинаторной задаче и ее приложениях в теории тестов, дис. на соискание степени канд. физ.-мат. наук, М., 1970.
80. *Погосян Э. М.* Δ-графы и некоторые их свойства. ДАН АрмССР, т. LIV, № 4, 1972.
81. *Погосян Э. М.* 1-индукторы и некоторые их свойства, ДАН АрмССР, т. LVIII, № 1, 1974.
82. *Погосян Э. М.* Сравнительные характеристики согласующих индукторов, ДАН АрмССР, т. LX, № 3, 1975.

83. *Погосян Э. М.* Индуктивный вывод с обратной связью. ДАН АрмССР, т. LX, № 5, 1975,
84. *Погосян Э. М., Саркисян О. А.* Об одной формализации индуктивного обобщения, сб. ВЦ АН АрмССР, 1975.
85. *Погосян Э. М.* Системы множеств с наименьшим числом подмножеств, сб. «Комбинаторный анализ», в. 4, МГУ, М., 1976.
86. *Погосян Э. М.* К теории автоматического синтеза понятий, «Семиотика и информатика», в. 8, ВИНИТИ, М., 1977.
87. *Погосян Э. М.* Модельные системы информатики: сравнительный анализ методов теории решения задач и информатики, НТИ, в. 2, № 5, 1977.
88. *Погосян Э. М.* Модельные системы информатики: основные критерии эффективности информационных методов и методы их вычисления на задачах-посредниках. «Вопросы информационной теории и практики», № 35, ВИНИТИ, М., 1978.
89. *Погосян Э. М.* Обучение как разновидность индуктивного вывода, «Техническая кибернетика», № 3, 1978.
90. *Погосян Э. М.* Об автоматическом усилении стратегий управления. «Семиотика и информатика», в. 12, ВИНИТИ, М., 1979.
91. *Погосян Э. М.* К классификации проблем расшифровки описаний. ДАН АрмССР, т. LXVIII, № 1, 1979.
92. *Погосян Э. М.* К оценке сложности и приближенной расшифровке комбинаторных описаний, ДАН АрмССР, т. LXX, № 2, 1980.
93. *Погосян Э. М.* К проблеме адаптации комбинаторных алгоритмов. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Методы мат. логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование». Паланга, 3—5 сентября, 1980.
94. *Погосян Э. М.* Адаптация комбинаторных алгоритмов управления, Труды II Международного совещания по искусственному интеллекту, Репино, октябрь, 1980.
95. *Погосян Э. М., Амбарцумян М. А., Арутюнян Ю. Г., Аджабян Н. А.* Программа накопления и использования закономерностей типа: правдоподобные цели $\Rightarrow$ рекомендуемые решения. Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара «Интеллектуальные банки данных», Цахкадзор, 10—18 марта, 1980.
96. *Погосян Э. М., Амбарцумян М. А., Аджабян Н. А., Арутюнян Ю. Г., Джндоян Л. О., Карапетян Б. К.* Пакет прикладных программ для исследований методов адаптации комбинаторных алгоритмов управления (АКА1,2), отчеты ВЦ АН АрмССР за 1974—1980 гг.
97. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения, М., 1975.
98. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961.
99. *Поспелов Г. С., Поспелов Д. А.* Искусственный интеллект, «Вестник АН СССР», № 10, М., 1975.
100. *Поспелов Д. А.* Большие системы. Ситуационное управление, серия «Мат. и киб.», М., Знание, 1975.
101. *Нильсон Н.* Искусственный интеллект, М., Мир, 1973.
102. *Растригин Л. А., Фролов В. Н. Львович Я. Е.* Структурная адаптация, «Информационные материалы . Кибернетика», 2(102), М., 1978.
103. *Реброва М. П.* Размытые множества в теории классификации, НТИ, сер. 2, № 10, 1976.
104. *Резницкий А. И., Юдин А. Д.* Ассоциативная библиотека фрагментов, см. [76].
105. *Ричард М. Карп.* Сводимость комбинаторных проблем, «Кибернетический сб.», в. 12, М., 1975.
106. *Самохвалов К. Ф.* О теории эмпирических предсказаний, «Вычислительные системы», в. 55, 1973.
107. *Саркисян О. А.* Обобщенные Δ-графы, сб. «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники», Ереван, 1975.

108. *Селтон Г.* Автоматическая обработка, хранение и поиск информации, М., «Сов. радио», 1973.
109. *Семюэль А.* Некоторые исследования возможности обучения машин на примере игры в шашки. Сб. «Вычислительные машины и мышление» под ред. Фейгенбаума Э. и Фельдмана Дж., М., Мир, 1967.
110. *Сидоров И. Г.* Общее и различное в задачах ассоциативного поиска и распознавания образов, НТИ, сер. 2, № 6, 1969.
111. *Слисенко А. О.* Сложностные задачи теории вычислений (препринт), М., 1979.
112. Современное состояние теории исследования операций, под ред. Моисеева Н. Н., М., Наука, 1979.
113. *Согомонян Е. С.* Об одном подходе к задаче построения тестов, «Автоматика и телемеханика», № 10, 1968.
114. *Соловьев Н. А.* Тесты (теория, построение, применение), Новосибирск, 1978.
115. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач, М., Наука, 1974.
116. *Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М.* Конечные автоматы. Поведение и синтез. М., Изд-во физ.-мат. лит., 1972.
117. *Тыугу Э. Х.* Синтез программ (обзор), Тезисы Всесоюз. конф. «Методы мат. логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование», Паланга, 3—5 сент., 1980.
118. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? М., Изд-во физ.-мат. лит., 1960.
119. *Фано Р.* Передача информации. Статистическая теория связи, М., 1965.
120. *Фатеев А. Е., Ройтман А. И., Фатеева Т. П.* Прикладные программы в системе математического обеспечения ЕС ЭВМ, «Статистика», М., 1976.
121. *Флейвелл Дж. Х.* Генетическая психология Жана Пиаже, М., Просвещение, 1967.
122. *Фрейвалд Р. В.* О сложности и оптимальности предельных вычислений, «Ученые записки Латв. гос. универс. им. П. Стучки», выпуск II, том 233, Рига, 1975.
123. *Фрейвалд Р. В.* Предельно вычислимые функции и функционалы, Теория алгоритмов и программ, «Ученые записки Латвийского государственного университета им. Петра Стучки», выпуск I, т. 210, Рига, 1974.
124. *Хант Э., Марин Дж., Стоун Ф.* Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине. М., Мир, 1970.
125. *Харари Ф.* Теория графов, М., 1973.
126. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968.
127. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающих систем, М., 1970.
128. *Цыпкин Я. З.* Алгоритмы функционирования адаптивных систем, сб.: «Вопросы кибернетики», серия «Адаптивные системы», М., 1974.
129. *Цыпкин Я. З.* Адаптивные алгоритмы оптимизации при априорной неопределенности, «Автоматика и телемеханика», № 6, 1979.
130. *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. LI, 1958.
131. *Черный А. И.* Введение в теорию информационного поиска, М., 1975.
132. *Чернявский С., Лахути В. Т.* О проблеме оценки поисковых систем, часть I, НТИ, сер. 2, № 1, 1970.
133. *Шеннон К.* Символический анализ релейных и переключательных схем. В сб.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ., 1963.
134. *Шеннон К.* Составление программ для игры в шахматы на вычислительной машине, Работы по теории информации и кибернетике, М., ИЛ., 1963, стр. 192—215.
135. *Шеннон Р.* Иммитационное моделирование систем—искусство и наука, М., Мир, 1978.
136. *Шенфилд Дж.* Математическая логика, М., Мир, 1975.
137. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок, М., Наука, 1971.
138. *Шрейдер Ю. А.* Об одной модели семантической теории информации, «Проблемы кибернетики», в. 13, 1965.

139. *Шрейдер Ю. А.* Информация и метаинформация, НТИ, сер. 2, № 4, 1974.
140. *Эббинхауз Г. Д., Якобс К. и др.* Машины Тьюринга и рекурсивные функции, М., Мир, 1972.
141. *Эшби У. Р.* Что такое разумная машина, сб. «Кибернетика ожидаемая и кибернетика неожиданная», М., 1968.
142. *Эшби У. Р.* Несколько замечаний. В кн.: «Общая теория систем», М., Мир, 1966.
143. *Юдин А. Д.* Библиотека эндшпиля программы «Пионер» (использование опыта прошлого по справочному методу и методу стремления, см. [76]).
144. *Юдович М. М.* Староиндийская защита. Прошлое. Настоящее. Будущее, М., Физкультура и спорт. 1967.
145. *Юл. Дж. Э. Кендэл М.* Теория статистики, М., 1960.
146. *Berliner H. J.* A Representation and Some Mechanisms for a Problem-Solving Chess Program, Advances in Computer Chess 1, M. R. B. Clarke (editor), Edinburgh, 1977, 7—30.
147. *Blum M.* A machine-independent theory of the complexity of recursive functions, J. ASM, 14, № 2 (1967), 322—336. (Русский перевод в сб. „Проблемы математической логики", М., Мир, 1970).
148. *Blum M.* On effective procedures for speeding-up algorithms, J. Assoc. Comp. Mach., 18, № 2, (1971), 290—305. (Русский перевод в сб. „Сложность вычислений и алгоритмов", М., Мир, 1974).
149. *Bratko I., Kopec D., Michie D.* Pattern-based representation of chess end-game knowledge, The Computer Journal, v. 21, № 2, 1978.
150. *Clements G. F., Lindstrom B.* A Generalization of a Combinatorial Theorem of Macaulay, J. Comb. Theory, v. 7, 1969.
151. *Good I. J.* A five year plan for automatic chess, Machine Intelligence, 2, 1966.
152. *Hájek P., Havranek T.* Mechanizing Hypothesis Formation (Mathematical Foundations for a General Theory), Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
153. *Helm J., Joung P.* On size vs. efficiency for programs admitting speedups, J. of Symb. Logyc, 36, № 1, 1971.
154. International Joint Conference on Artificial Intelligence, Tokyo, Japan, 20—24 August 1979, 2 vols.
155. International Workshop on Program construction, Chateau de Bonas, France, 8—12 Sept. 1980.
156. *Macaulay F. S.* Some properties of enumeration in the theory of modular systems, „Proc. London Math. Soc.", v. 26, 1927.
157. *Michalski R. S.* An Experiment on Inductive Learning in Chess End Games: The King—Pawn—King Game, NATO Advanced Study Institute, „Machine Representation of Knowledge", Santa Crus, 1975.
158. *MichieD.* Formation and Execution of Plans by Machine, Artificial Intelligence and Heuristic Programming, eds. N. V. Findler and B. Meltzer, Edinburgh Univ. Press, Edinburgh, 1971.
159. *Michie D.* King and rook against king; historical bacground and a problem on the infinite board см. [146], 30—59.
160. *Pitrat J.* A Program for Learning to Play Chess, Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Academic Press, 1976.
161. *Pitrat J.* A Chess Combination Program which Uses Plans, Artificial Intelligence 8, 1977, 275—321.
162. *Pitrat J.* Realization of a Program Learning to Find Combination at Chess, Computer oriented learning processes, NATO Advanced Study Institute, Bonas, 1974, 273—299.
163. *Walters R. E.* Benchmark techniques: A constructive approach, „The Computer Journal", v. 19, 1, 1976.